ⓒ Witold Marciszewski • Zakład Metodologii Nauk Społecznych
Wyższa Szkoła Administracji Publicznej im. Stanisława Staszica w Białymstoku
Wykład: Filozofia Umysłu i Sztucznej Inteligencji – 2007/2008

6. Szkic do szkicu uzasadnienia Twierdzenia Gödla: o niezupełności niesprzecznego systemu formalnego arytmetyki liczb naturalnych

§1. Wprowadzenie

Przyjmujemy następujące oznaczenia.

1. x, y, z .... zmienne indywiduowe reprezentujące liczby naturalne.

2. j, k, m, n ... stałe indywiduowe będące nazwami liczb naturalnych.

3. p, q, r ... zmienne reprezentujące nazwy zdań.

4. X, Y, Z ... zmienne reprezentujące nazwy ciągów zdań.

5. $DS(X, p)$ ... Ciąg X jest *Dowodem Sformalizowanym* (formalnym, algorytmicznym) zdania p w **niesprzecznym** systemie arytmetyki liczb naturalnych.[1] Zaliczamy tę relację do *metalogicznych*, tzn. należących do tej części logiki, która traktuje m.in. o dowodzeniu.[2]

6. $N[p]$, w skrócie $[p]$ ... liczba będąca Numerem zdania $[p]$; nawiasów w kształcie [ ] używamy tu tylko w obecnym kontekście, stąd skracające zapis opuszczenie symbolu „N” nie będzie rodzić nieporozumień.

7. $N[X]$, w skrócie $[X]$, ... liczba będąca Numerem ciągu zdań X.

8. Ar_d ... relacja między liczbami, mianowicie numerem ciągu zdań i numerem zdania – jak w formule $Ar_d([X], [p])$ – będąca *arytmetyczną reprezentacją* metalogicznej relacji dowodzenia (zdania przez ciąg zdań) oznaczonej przez DS (por. punkt 5; na to odniesienie wskazuje dolny index „$_d$”, od „dowód”).

Częstymi terminami w tych rozważaniach będą „zdanie” i „formuła” (domyślnie – zdaniowa). Formuła to zdanie zawierające symbole *zmienne*, a więc schematyczne, otwarte na różne interpretacje. Te zaś powstają w zależności od tego, jakie wyrażenia *stałe* się *podstawi* za zmienne. Następuje więc w wyniku podstawienia wypełnienie schematu konkretną treścią czyli *konkretyzacja*. Zdanie będące formuła to np. „$x > 100$”, a jego możliwe konkretyzacje to zdania powstające z podstawienia za „x” dowolnej cyfry.

Ta porcja symboliki może nie zachwyci osób nienawykłych do tak odmiennego niż mowa codzienna sposobu komunikacji. Jest to jednak nieuniknione minimum. Kto zajrzy do oryginalnego artykułu Gödla, ten na jego 25 stronach znajdzie setki skomplikowanych formuł, a samych definicji wprowadzających dla ułatwienia różne skróty jest czterdzieści sześć.[3] Ale nawet z tak drastycznie (jak tutaj) okrojonym aparatem języka symbolicznego da się uzyskać pewien wgląd w treść twierdzenia Gödla, który wnosi coś ważnego w filozoficzne pojmowanie natury umysłu.

§2. Treść Twierdzenia Gödla

TG. W *formalnym systemie arytmetyki liczb naturalnych, o ile jest on niesprzeczny, istnieje zdanie prawdziwe, które nie ma w tym systemie dowodu sformalizowanego.* Symbolicznie:

$$\exists_p(\forall_X \neg DS(X, p) \wedge Ver(p)) \text{ lub (równoważnie) } \exists_p(\neg\exists_X DS(X, p) \wedge Ver(p)).$$

[1] Treść terminu „niesprzeczny” (wytłuszczonego) włączamy do treści symbolu „DS”, przez co upraszcza się symboliczny zapis twierdzenia Gödla; bez tego skrótu musi ono przybrać postać zdania warunkowego wskazującego w poprzedniku na warunek niesprzeczności.

[2] Grecki przedrostek *meta* oznacza „poza” (jak w „metafizyka”) lub „o”. Na szerzej pojętą logikę składają się rachunki logiczne (logika w węższym rozumieniu) oraz badania nad tą węziej pojętą logiką, czyli metalogika; obejmuje to badania nad dowodami, jakie przeprowadza się w rachunkach. Tak więc wypowiedzi dotyczące dowodzenia należą do metalogiki.

[3] Nie od rzeczy tu będzie uwaga, że inteligencja matematyczna, oprócz wiedzy, intuicji, wyobraźni, doświadczenia, pamięci, koncentracji, odpowiedniego tempa myślenia etc., wymaga biegłości w czymś, co można nazwać *inżynierią językową*. Od tego, jaką skonstruuje się maszynerię symboli i reguł ich używania, jak się w niej uwzględni psychologiczne prawa myślenia, zależy sukces w rozwiązywaniu problemów.

W zapisie symbolicznym warunek niesprzeczności systemu zawarty jest w treści predykatu „DX" (por. §1, punkt 5). Zwrot, że zdanie jest *niedowodliwe* oddany jest symbolicznie za pomocą kwantyfikatorów: istnieje takie zdanie, że nie ma dlań ciągu zdań będącego dowodem.

Żeby uzasadnić to twierdzenie, trzeba wskazać jakieś konkretne zdanie arytmetyczne, dla którego nie ma dowodu w formalnym (inaczej, sformalizowanym) systemie arytmetyki. Nasz dalszy wysiłek skoncentruje się na uzyskaniu takiego zdania. Posłuży do tego konstrukcja językowa, którą Gödel wynalazł z właściwą sobie niezwykłą pomysłowością; stąd trzeba się liczyć z trudnością jej uchwycenia „w pierwszym podejściu" (im rzecz nowsza i niezwyklejsza, tym mniej oswojona, a więc trudniej przystępna).

Skoncentrujemy się na pierwszej części symbolicznego zapisu TG, oznaczając go etykietą Synt — od pojęcia *syntaktyki* jako zbioru stosunków zachodzących między wyrażeniami, np. gramatycznych. Dowodliwość, jako zachodząca między zdaniem a jakimś ciągiem zdań, jest typowym stosunkiem syntaktycznym. Druga część tezy TG dotyczy prawdziwości, która jest stosunkiem semantycznym czyli rozważanym w *semantyce*; to znaczy takim, który zachodzi nie wewnątrz języka (jak relacje syntaktyczne) lecz między językiem i rzeczywistością. Oto formuła, na której obecnie skupimy uwagę.

Synt: $\exists_p \forall_X \neg DS(X, p)$; lub (równoważnie) $\exists_p \neg \exists_X DS(X, p)$.

§3. Odwzorowanie zdania Synt w języku arytmetyki

Ten typ *odwzorowania*, o którym mowa niżej, określamy też jako *przekład* (zdania Synt) na język arytmetyki lub jako *kodowanie* arytmetyczne. Każdemu wyrażeniu z języka logicznego, obejmującego pojęcie dowodzenia (do którego to języka należy Synt), przydziela się, na zasadzie kodowania, określoną liczbę naturalną zwaną jego *numerem* (gödlowskim). Także dla zbiorów wyrażeń, takich m.in., jak ciąg zdań składający się na dowód, mamy obliczone według pewnej zasady numery.

Żeby oddać to odwzorowanie w symbolice możliwie poręcznej, przyjmiemy konwencję, że numer wyrażenia tworzymy przez wzięcie tego wyrażenia w nawiasy kwadratowe. Np. numer symbolu negacji to $[\neg]$, numer zdania p to $[p]$, nr ciągu (zdań) X to $[X]$ itd. Zdanie otrzymane w wynika takiego przekładu stwierdza zachodzenie pewnego stosunku między liczbami, nie jest to już więc stosunek DS między zdaniami, lecz jego arytmetyczne odwzorowanie. Oznaczywszy je przez Ar_{ds} otrzymamy następujące odwzorowanie zdania Synt w zdaniu arytmetycznym:

Aryt: $\forall_{[X]} \neg Ar_d([X], [p])$.

Odczytajmy to w języku po części naturalnym: *Nie istnieje liczba* $[X]$*, która byłaby numerem ciągu zdań, pozostająca w stosunku arytmetycznym* Ar_d *do liczby* $[p]$.

Zdanie Aryt jest przekładem zdania Synt, należącego do języka syntaktyki, na zdanie Aryt należące do języka arytmetyki. Oczywiście, do istoty przekładu należy to, że zdanie tłumaczące jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwe zdanie tłumaczone.

Żeby przyjrzeć się tej oczywistości (kluczowej w naszej argumentacji) w przypadku tłumaczeń na język arytmetyczny, przywołajmy przykłady tłumaczeń z języka fizykalnego na arytmetyczny (F:A) i z humanistycznego na arytmetyczny (H:A).

Fiz$_1$. Żadne ciało nie porusza się szybciej niż foton.
F:A$_1$. Żadna liczba określająca prędkość ciał nie jest większa od liczby określającej prędkość fotonu (tj. 300000 km/sek).

Fiz$_2$. Żadne ciało nie jest lżejsze od wodoru.
F:A$_2$. Żadne ciało nie ma jądra atomowego, w którym liczba cząstek elementarnych (proton, elektron) byłaby mniejsza od dwóch.

Hum$_1$. Żaden uczony nie dokonał wielkiego odkrycia w wieku takim, jak Gödel.
H:A$_1$. Nie ma liczby x określającej wiek, w którym uczony dokonałby wielkiego odkrycia – takiej, że $x = 21$.

W powyższych przykładach różne relacje są odwzorowane przez arytmetyczne stosunki większości, mniejszości, równości. Można by brać pod uwagę inne relacje, jak podzielność liczby przez ileś itd., ale wtedy byłyby to przykłady bardziej skomplikowane. W zdaniu Aryt pojawia się relacja o tyle tajemnicza, że nie potrafimy w niej odnaleźć niczego znanego z naszej praktyki rachowania. Bo też trzeba było niemałej pomysłowości i trudu ze strony Gödla, żeby taki obiekt matematyczny określić dla celów zamierzonej argumentacji. Nie mogąc się tu wdawać w śledzenie jego misternej konstrukcji, przyjmujemy do wiadomości, że jest taka relacja w uniwersum matematycznym, a nie mając do niej dostępu „w naturze", posługujemy się niejako jej makietą oznaczoną symbolem „Ar_d".

Tak więc, operujące tym symbolem zdanie Aryt jest równoważne (na prawach przekładu) zdaniu Synt, czyli stwierdzeniu, że nie istnieje żaden ciąg X, który byłby dowodem zdania a; innymi słowy, zdanie a nie jest dowodliwe (z dopowiedzeniem: w sformalizowanym niesprzecznym systemie arytmetyki liczb naturalnych).

§4. Jak wygląda w języku arytmetyki zdanie orzekające samo o sobie, że nie jest dowodliwe?

Jak mogłoby takie zdanie wyglądać, nie trudno sobie wyobrazić. Rozważmy Aryt. Zdanie to ma swoj numer, który obliczamy, zastępując kolejno jego symbole cyframi, wskazanymi przez nasz klucz kodujący, oraz znajdując iloczyn liczb oznaczanych przez owe cyfry.

Przypuśćmy, iż da się stworzyć tak zmyślną konstrukcję, że numerem zdania a okaże się ta sama liczba, która jest numerem zdania Aryt. Wtedy zdanie to drugie powiada, co następuje:

Nie ma takiej liczby będącej numerem ciągu zdań, która byłaby w relacji Ar_d do liczby $[p]$, to jest, liczby będącej numerem zdania Aryt dotyczącego $[p]$.

Na mocy równoważności przekładu na język arytmetyki z tekstem odwzorowanym przez przekład (por. podane wyżej egzemplifikacje), znaczy to tyle, co powiedzenie:

Nie ma ciągu zdań będącego dowodem zdania Aryt.

Zwrot „być dowodem" (symbolicznie DS), przypomnijmy, ma tu w domyśle dopowiedzenie: w sformalizowanym niesprzecznym systemie arytmetyki liczb naturalnych.

To, że jakieś zdania sformułowane w języku arytmetyki nie ma w niej dowodu, to nie jest rewelacja. Skoro aksjomatyka arytmetyczna jest prawdziwa (w co wierzymy, mając po temu mocne podstawy), nie może z niej wynikać żadne zdanie fałszywe.

Rzecz jest zdumiewająca dopiero wtedy, gdy jakieś zdanie nie mogące mieć dowodu okaże się prawdziwe. Ujawni to nieprzewidywaną dotąd (przed odkryciem Gödla) słabą stronę metody algorytmicznej: mianowicie, brak tak uniwersalnego algorytmu dowodowego, który w każdym przypadku umożliwiałby mechaniczny (czyli osiągalny dla komputera) dowód zdania prawdziwego dokonany na podstawie aksjomatów arytmetyki.

§5. Jak utworzyć zdanie arytmetyczne samoorzekające – o liczbie będącej jego własnym numerem

Zajmiemy się teraz operacjami językowymi, które mogą się kojarzyć z dziwnościami *Alicji w krainie czarów*, gdzie dzieją z językiem różne niezwykłe rzeczy. Opowiada się tam zdarzenia do niczego niepodobne w naszym codziennym życiu (traktowanym przez niektórych zbyt pochopnie jako jedyny model realności). Istotnie, będziemy tu mieć do czynienia z magicznym jakby zabiegiem, podobnym do utożsamienia osoby z jej własnym nazwiskiem. W codziennym świecie osoba i jej nazwisko to dwie różne rzeczy. Ale w tym, gdzie arytmetyka chadza pod rękę z logiką dzieją się rzeczy, o których się nie śniło nawet filozofom (o ile nie mieli szczęścia uczyć się filozofii w szkole Gödla).

Zabieg będący do wykonania polega na pewnej osobliwej konkretyzacji formuły arytmetycznej (ogólne pojęcie konkretyzacji wyjaśnia się w §1). Wyjdźmy przykładowo od stwierdzenia, które oznaczymy jako A: że istnieje liczba będąca następnikiem dowolnej liczby; powiedzmy, że to zdanie A ma numer m.[4]

A) $\exists_x(x = Sy)$ ..... numer m.

W zdaniu tym występuje zmienna „y", której nasz klucz kodowy przypisuje numer 13.[5]

Gdyśmy już raz ustalili, że zmienne reprezentują dowolne liczby naturalne, wolno nam podstawić za zmienną nr 13 dowolną, jaka nam się żywnie podoba, liczbę naturalną. Jeśli tak, to czemu nie liczbę m, będącą numerem rozważanej formuły? Że tak wolno, nie ma wątpliwości, a po co, to się niebawem okaże. Ten rodzaj konkretyzacji zasługuje na określenie: **autokonkretyzacja**; można też powiedzieć „samokonkretyzacja" (ale lepiej jest stylistycznie zestawiać człon łaciński z łacińskim).[6]

W wyniku autokonkretyzacji formuły A dostajemy zdanie z nowym numerem, którym niech będzie n.

B) $\exists_x(x = Sm)$ ..... numer n.

Formuła konkretyzuje się tutaj w miejscu wskazanym przez zmienną, biorąc za ów konkret do wypełnienia schematu liczbę będącą jej własnym numerem.

> Zauważmy, na prawach dygresji, analogię między taką językową samozwrotnością i aktami samozwrotnymi naszej świadomości. Samolub lubi sam siebie, co jest autokonkretyzacją schematu *x lubi y*. Narcyz zachwyca się sam sobą, pokutujący grzesznik ubolewa nad sobą itd. Kłopot z takim operacjami umysłu zaczyna się wtedy, gdy ktoś się uprze konkretyzować schematy zbyt śmiałe

[4] Uwaga: litera *m* nie jest tu zmienną lecz symbolem określonej liczby, czyli nazwą indywiduową w języku arytmetyki, z tym, że nie wnikamy w treść tej nazwy, poprzestając na umownym jej oznaczeniu literą. Por. §1, wiersz 2 w liście oznaczeń).

[5] W tym miejscu i w każdym innym, gdzie odwołuję się do systemu kodowania, idę w tym, jak i w niektórych innych punkatch obecnego wykladu, za przykładowym przedstawiniem postępowania Gödla zawartym w książce: E. Nagel i J. R. Newman, *Twierdzenie Gödla* (tyt. orygin. *Gödel's proof*, 1952), tłumaczyła Barbara Stanosz, PWN, Warszawa 1966.

[6] Jest to określenie obrazowe, tak rzecz przedstawiające, jakby to formuła się konkretyzowała, podczas gdy, jest to operacja wykonywana na formule przez nasz umysł. Ale taką „podmianę" dopuszcza powszechny zwyczaj językowy. Powiadamy, że zdanie coś mówi, że książka coś opowiada itp., podczas gdy to człowiek mówi zdaniem, autor opowiada w książce itd.

w swej ogólności, w rodzaju. *x lubi wszystkich niesamolubów*. Niech *x*-em będzie Ciocia Mania. Czy Ciocia jest samolubem? Jeśli tak, to lubi samą siebie, ale skoro nie lubi żadnego samoluba, to nie może lubić siebie. No, ale jeśli nie lubi siebie, to musi się lubić jako osobę niesamolubną. Takie łamigłówki określa się jako antynomie (aporie, paradoksy). Będąca tematem tych rozważań wypowiedź „niniejsze zdanie nie jest dowodliwe” stoi, by tak rzec, nad przepaścią antynomii, ale w nią nie wpada dzięki zachowaniu należytego umiaru. A jest nim jest rozsądne ograniczenie zakresu dowodliwości do formalnego systemu arytmetyki.

Numer kodowy zdania B, mianowicie n, zależy wyłącznie od tego, jaka cyfra została zastąpiona jaką (tu zastąpiono „13” cyfrą, która oznacza liczbę m). Powiemy więc, dokładniej, że liczba n jest funkcją liczb m i 13. Niech symbolem tej funkcji będzie greckie α z pisanym u dołu wskaźnikiem „m” dla wskazania, że ma się na uwadze operację na zdaniu numer m. A zatem: $n = \alpha_m(13, m)$. Użycie zapisu

C) $\alpha_m(13, m)$

zamiast n ma tę zaletę, że wskazuje na sposób uzyskania liczby n czyli to, jak została skonstruowana. Odda to nam niebawem istotną przysługę. Odczytujemy C słownie zwrotem:

C*) Numer formuły otrzymanej z formuły numer m przez autokonkretyzację w m w miejscu zmiennej numer 13.

Przekształćmy teraz sformułowanie C* w ten sposób, że zamiast o pewnej indywidualnej liczbie m, będzie mowa o *jakiejkolwiek* liczbie; zostawimy natomiast (dla ustalenia uwagi) odniesienie do numeru zmiennej 13. Będziemy teraz mieć na uwadze: *numer formuły otrzymanej z formuły o <u>dowolnym</u> numerze przez autokonkretyzację dokonaną w miejscu zmiennej numer 13*. Dowolność tak wyrazimy w zapisie symbolicznym, że zamiast konkretnej liczby m umieścimy w funkcji α symbol zmienny; niech będzie nim „y”. W ten sposób dostajemy schematyczny, czyli bez konkretnej liczby, następujący zapis:

D) $\alpha_y(13, y)$

Taki schematyczny zapis określa nie jedną konkretną liczbę, lecz jakąś klasę liczb. Oto, dla porównania, przykłady takich klas definiowanych przez schematy liczbowe. Gdy $\sqrt{2}$ jest liczbą konkretną, $\sqrt{x}$ jest schematem liczbowym obejmującym cała klasę liczb będących pierwiastkami kwadratowymi dowolnej liczby. Podobnie, w dziedzinie pozamatematycznej, ojciec Johna Stuarta Milla to jedna konkretna osoba – James Mill; zaś ojciec x-a to osoba niejako schematyczna czyli, innymi słowy, pewna klasa ludzi. W dalszym rozważaniu obiekty w rodzaju $\sqrt{x}$, dwukrotność liczby y, iloczyn $5z$ itd. dogodnie będzie określac jako *liczby schematyczne*.

O liczbach schematycznych, tak samo jak o konkretnych, pewne zdania są prawdziwe, a inne fałszywe. Prawdą jest np., że $\sqrt{x}$ jest mniejszy lub równy x-owi (równy gdy $x = 1$), a mijałoby się z prawdą powiedzieć, że większy od x-a. Co się tyczy schematycznego osobnika ojciec x-a, to jest prawdą, że jest on mężczyzną, a napewno nie jest niemowlęciem płci żeńskiej.

Gdy tak się rzeczy mają, to również o schematycznej liczbie $\alpha_y(13, y)$ coś będzie prawdą, a coś nieprawdą. Np. liczba taka jest z pewnością większa od tysiąca. Dlatego, że numer każdej formuły zawierającej zmienną y jest iloczynem iluś czynników, wśród których jest jakaś liczba pierwsza do trzynastej potęgi (jako numeru symbolu y); a już dwa do dziesiątej daje 1024.

Utwórzmy jakieś zdanie na temat owej schematycznej liczby $a_y(13, y)$, żeby się oswoić z jej właściwościami. Niech będzie to zdanie: *żadna liczba pierwsza nie jest czynnikiem iloczynu, który byłby liczbą* $\alpha_y(13, y)$.

Tak jest istotnie, jak mówi to zdanie. Wszystkie bowiem czynniki takiego iloczynu są potęgami kolejnych liczb pierwszych, a więc liczbami złożonymi.

Weźmy literę P jako nazwę zbioru liczb pierwszych, R jako oznaczenie relacji *jest czynnikiem iloczynu*, zaś j jako numer powyższego zdania (podkreślonego kursywą). Oto jego zapis symboliczny.

E) $\forall_{x \in P} \neg R(x, \alpha_y(13, y)$ ..... numer j.

Za chwilę się okaże, do czego służy zabieg autokonkretyzacji. Jest on nieodzowny do konstrukcji *zdań autopredykatywnych*, czyli *zdań samoorzekających*, to znaczy, orzekających coś o samych sobie. Tak zbliżamy się do celu, jakim jest znalezienie zdania arytmetycznego orzekającego o sobie niedowodliwość. Ostatnim odcinkiem przed metą będzie rozpoznanie na przykładzie E, jak przebiega przejście od wyrażenia takiej postaci do zdania samoorzekającego.

Autokonkretyzacja zdania E ze względu na określoną zmienną, powiedzmy zmienną numer 13, polega w – myśl podanej wcześniej dyrektywy – na podstawieniu za zmienną numer trzynaście numeru zawierającej tę zmienną formuły, tutaj więc podstawieniu liczby j. Tak otrzymujemy:

F) $\forall_{x \in P} \neg R(x, \alpha_j(13, j)$ ..... numer $\alpha_j(13, j)$.

Przełóżmy to z języka symbolicznego na polski: żadna liczba pierwsza nie jest czynnikiem liczby $\alpha_j(13, j)$. A liczba $\alpha_j(13, j)$ jest numerem naszej formuły F, bo ma nim być liczba zależna od j i 13 w sposób określony funkcją α_j. Tak więc F jest zdaniem samoorzekającym, orzekającym pewną własność (brak liczby pierwszej, która byłaby czynnikiem) o liczbie z którą się ono samo utożsamia jako ze swoją reprezentacją liczbową.

Jeśli odnieść X do numerów ciągów formuł, a zamiast relacji R umieścić Ar_d, to otrzymamy zdanie o relacji bedącej arytmetycznym odpowiednikiem stosunku dowodliwości: *nie ma takiej liczby, która byłaby numerem ciągu formuł i* *pozostawała w relacji Ar_d do jakiegokolwiek numeru formuły utworzonej przez autokonkretyzację pewnej formuły zawierającej zmienną numer 13.*

Niech formuła poddana autokonkretyzacji ma numer n, a rozważany wariant formuły opatrzymy etykietą F". Symbolicznie:

F") $\forall_X \neg Ar_d([X], \alpha_y(13, y))$ ..... numer n.

Autokonkretyzacja zdania F" przynosi w wyniku zdanie samoorzekające:

G) $\forall_X \neg Ar_d([X], \alpha_n(13, n))$ ..... numer $\alpha_n(13, n)$.

I to jest słynne Zdanie Gödlowskie – orzekające o sobie samym niedowodliwość!

§6. Refleksja nad metodą tworzenia zdań samoorzekających w arytmetyce

Jeśliby *happy end* z poprzedniego odcinka wydał się komuś zaskakujący, zastanówmy się bardziej szczegółowo, jak do niego doszło. Źrodło jego osobliwości jest w tym, że mamy do czynienia z rodzajem funkcji liczbowej, jakiej się nie spotyka w swojskiej szkolnej matematyce. Jej wartość zależy od argumentów liczbowych służących do opisu formuł arytmetycznych. Są to dwie liczby, z których jedna jest numerem jakiejś formuły, a druga numerem jakiejś zmiennej wolnej występującej w tejże formule.

Termin *funkcja* musi „ciężko pracować" (jak mawiał o słowach Humpty Dumpty), żeby podołać dwóm naraz zadaniom, do których pełnienia powinny być dwa osobne terminy. Dzieli on ów los z innym szacownym terminem naukowym – *prawo nauki* – skorzystajmy więc z tej pouczającej analogii. Prawem nazywamy zarówno zachodzącą w świecie jednoznaczną zależność między zjawiskami, na przykład grawitację, jak i zdanie, które tę zależność opisuje, np. formułę Newtona mówiącą o masach ciał, odległościach etc. To drugie należy do sfery języka, pierwsze do pozajęzykowej; w tym przykładzie – fizykalnej.

Podobnie rzecz się ma z pojęciem funkcji. W jednym znaczeniu jest to istniejący w matematycznym czy logicznym świecie obiekt abstrakcyjny, w drugim zaś – nazwa tego obiektu, tak utworzona, że swą strukturą wskazuje na metodę jego konstrukcji. Oto kilka przykładów. Funkcja następnika $y = s(x)$: mając dowolną liczbę x, można z niej zawsze otrzymać następną w sekwencji liczb naturalnych. Funkcja $y = 2x$ dostarcza podwojenia dowolnej liczby, zaś $y = \sqrt{x}$ pierwiastka kwadratowego etc. Funkcjami nazywamy zarówno (1) takie jednoznaczne – czyli z jednoznacznie określonym wynikiem – zależności między liczbami, a więc obiekty abstrakcyjne z kategorii relacji, jak i (2) wyrażenia opisujące owe zależności, np. „$y = s(x)$", „$y = \sqrt{x}$" etc. A dodatkowo, jeśli mieć na uwadze, że synomimem terminu *funkcja* jest *operacja* (działanie), dostrzegamy trzeci odcień znaczeniowy, mianowicie czynność umysłu polegającą na znajdowaniu wartości funkcji w sensie (1).[7]

Mamy tu na uwadze funkcję autokonkretyzacji α. Gdy jednym jej argumentem jest liczba m będąca numerem pewnej formuły, a drugim liczba stanowiąca numer (obecnej w tej formule) zmiennej y, jak liczba 13, to funkcja autokonkretyzacji ma postać $n = \alpha_y(m, 13)$; wartość tej funkcji oddana liczbą n jest numerem nowej formuły, otrzymanej z formuły numer m w drodze autokonkretyzacji.

Żeby oderwać się od konkretnych numerów m i n (którymi posłużyliśmy się jedynie dla wyrazistości przykładu), a mieć pewien ogólny schemat autokonkretyzacji, nazwany (w §5) liczbą schematyczną, umieśćmy w miejscu liczby m jakąś zmienną liczbową (por. pozycję 1 w §1). Nic nie przeszkadza, żeby w tej roli użyć litery „y", a więc symbolu mającego numer 13. Konstruowanie takiego schematu można porównać do tworzenia formy (matrycy) rzeźbiarskiej dla posągu. Symbol zmienny jest jak puste miejsce, które jak odlew wypełni się konkretną liczba, a kształt tego odlewu jest określony strukturą funkcji α.

Takiego schematu, jakby formy gotowej do tego, by ją wypełnić jakąś konkretną liczbą, potrzebujemy dla utworzenia zdania, które zechcemy doprowadzic do postaci samoorzekającej. W naszym problemie ma to być zdanie orzekające o sobie niedowodliwość.[7] Powtórzmy zabieg zastosowany w §5, tym razem śledząc go w świetle obecnego komentarza, posługującego się metaforą formy odlewniczej.

F") $\forall_X \neg Ar_d([X], \alpha_y(13, y)$ ..... numer n.

Gdy miejsce wskazane symbolem „y" wypełnimy konkretną liczbą, mianowicie numerem formuły F", wewnątrz tego zdania na miejscu wyrażenia oznaczającego schematyczną liczbę $\alpha_y(13, y)$ pojawi sie nazwa konkretnej liczby $\alpha_n(13, n)$. Jednocześnie, w myśl reguły określającej zabieg autokonkretyzacji, numerem nowej powstającej z tego zabiegu formuły będzie ta sama liczba $\alpha_n(13, n)$. Ta właśnie zbieżność, że ta sama liczba jest tematem, o którym mówi dane zdanie i jest zarazem numerem tegoż zdania, czyni je zdaniem samoorzekającym, mianowicie:

G) $\forall_X \neg Ar_d([X], \alpha_n(13, n)$ ..... numer $\alpha_n(13, n)$.

Stwierdza ono (powtórzmy po raz któryś), że nie istnieje liczba, która byłaby numerem ciągu zdań stanowiącego dowód zdania o numerze $\alpha_n(13, n)$, to jest zdania numerowanego tą samą liczbą, która jest numerem naszego zdania G. Z czego wynika, że zdanie G nie ma dowodu (w sensie, przypomnijmy, dowodu sformalizowanego w formalnym systemie arytmetyki liczb naturalnych). Inaczej mówiąc, jest niedowodliwe. ♣

[7] Ostrzeżenie o tej wieloznaczności jest potrzebne, żeby posługując się pojęciem funkcji nie trudzić się nadmiernie wyjaśnianiem w każdym przypadku, o który z sensów chodzi, lecz zdać się na wyjaśniającą rolę kontekstu.

[7] W §5, dla uzyskania tła porównawczego, rozważalismy przykładowo zdanie E orzekające o sobie, że nie jest reprezentowane liczbą, dla której zachodziłaby relacja będąca tematem tego zdania.