

## 1. Zasady i sposób funkcjonowania notacji binarnej (dwójkowej)

### §1. Zasady notacji arytmetycznej pozycyjnej

*Notacja arytmetyczna* jest to ta część języka arytmetyki, na którą składają się nazwy liczb (cyfry) oraz *gramatyczne reguły* tworzenia cyfr złożonych (ciągów cyfrowych) z cyfr prostych. Te cyfry proste wymienia *słownik* dla danej notacji. Np. w słowniku notacji dziesiętnej mamy dziesięć prostych wyrazów: od „0” do „9”, a w słowniku notacji binarnej (dwójkowej) mamy dwa: „0” i „1”.<sup>1</sup>

Reguły gramatyczne dla notacji pozycyjnej są zawsze te same, niezależnie od zasobu wyrazów w słowniku. Dla sformułowania reguł potrzebne jest nam pojęcie *rzędu złożoności* cyfry. I tak cyfra jednowyrazowa należy do pierwszego rzędu złożoności, dwuwyrazowa, np. „13”, do drugiego itd. W ramach każdego rzędu cyfry są uporządkowane co do wielkości, stosownie do tego, jak duże liczby są przez nie oznaczane. W ten sposób określenie wielkości liczby dziedziczy się na określenie wielkości cyfry. Powiemy więc, że cyfra „13” jest większa niż „12” w tym sensie, że oznaczana przez pierwszą liczbą 13 jest większa od liczby 12 (choć nie jest jako cyfra bardziej złożona, i w tym innym sensie „12” i „13” są równe). I tak, cyfra „0” wśród nazw liczb naturalnych (tj. całkowitych nieujemnych) jest w tym porządku pierwsza. Każda zaś inna powstaje w wyniku dodania jedynek do liczby poprzedzającej.

#### **Reguła KR: Konstruowania Rzędu złożoności.**

Najmniejsza cyfra złożona w rzędzie  $n$ -tym zaczyna się od jedynek, po której następuje tyle zer, ile trzeba, żeby razem z jedyneką utworzyć ciąg  $n$ -wyrazowy.

Np. najmniejsza cyfra złożona rzędu drugiego składa się z wyrazów tworzących ciąg „10”; rząd trzeci zaczyna się od „100” itd.

#### **Reguła NR: Następstwa Rzędów**

Cyfra najmniejsza w danym rzędzie ( $n$ ) następuje po największej cyfrze rzędu mniejszego o jeden ( $n - 1$ ).

Np., jeśli rozważać (jak w w przykładach poprzednich) notację dziesiętną, to największą cyfrą w rzędzie pierwszym jest „9”, po niej więc musi się zacząć rząd drugi, a w nim następująca po „9”, jest najmniejsza cyfra dwuwyrazowa; tą zaś – wedle reguły KR – jest „10”.

I teraz uwaga: w notacji binarnej największą cyfrą w rzędzie pierwszym jest „1” oznaczająca liczbę jeden. Po niej więc musi się zacząć rząd drugi, a w nim następuje po „1” najmniejsza cyfra dwuwyrazowa. Tą zaś wedle reguły KR jest cyfra „10” oznaczająca liczbę dwa.

Notacja tworzona wedle reguł KR i NR nazywa się *pozycyjną*. To bowiem, którą liczbę oznacza dana cyfra zależy nie tylko od jej kształtu, lecz także od jej pozycji w cyfrze złożonej czyli w pewnym ciągu cyfr prostych. Np. cyfra o kształcie „5”, będąc ostatnią pozycją ciągu, oznacza liczbę pięć, jak w „5”, „15”, „35”, „105” itd. Będąc pozycją przedostatnią, oznacza pięćdziesiąt, jak w „51”, „153”, „10055”. Będąc na trzeciej pozycji od końca, oznacza liczbę pięćset, jak w „1543”. Słowem, numer pozycji liczonej od końca wskazuje na rząd wielkości, do którego się zalicza dana pojedyncza cyfra w kontekście jakiejś cyfry złożonej.

### §2. Porównanie notacji binarnej z dziesiętną

Przyjrzymy się obecnie dwóm kolumnom, z których pierwsza wylicza kolejne liczby naturalne za pomocą notacji binarnej (**B**), a druga za pomocą dziesiętnej (**D**). Nazwijmy to zestawienie Tabelą Konwersji, jako że wskazuje ona sposób przekształcania czyli konwersji zapisów binarnych na dziesiętne i odwrotnie.

<sup>1</sup> W informatyce używa się też do pewnych celów notacji szesnastkowej, a teoretycznie możliwa jest każda inna, choć nie każda jednakowo praktyczna.

Tabela Konwersji

B	D	liczba
0	0	zero
1	1	<b>jeden</b> = $2^0$
10	2	<b>dwa</b> = $2^1$
11	3	trzy
100	4	<b>cztery</b> = $2^2$
101	5	pięć
110	6	sześć
111	7	siedem
1000	8	<b>osiem</b> = $2^3$
1001	9	dziewięć
1010	10	dziesięć
1011	11	jedenaście
1100	12	dwanaście
1101	13	trzynaście
1110	14	czternaście
1111	15	piętnaście
10000	16	<b>szesnaście</b> = $2^4$

Jak znajdować binarne cyfry złożone, poczynając od „10”? Zasada jest taka sama, jak przy znajdowaniu dziesiętnych liczb złożonych: trzeba dodać jeden do największej liczby z poprzedniego rzędu złożoności. W notacji dziesiętnej:  $9 + 1 = 10$ . Tak samo w notacji binarnej:  $1 + 1 = 10$ , bo skoro 1 jest największą cyfrą binarną, to dodając jeden przechodzimy do następnego rzędu wielkości. Dalej, gdy dochodzimy do największej dwuwyrzawowej cyfry binarnej „11” (trzy), dodajemy „1”, tzn. rachujemy, jak następuje:

$$\begin{array}{r} 11 \\ + 1 \\ \hline 100 \end{array}$$

Stosujemy przepis (algorytm) na dodawanie „w słupkach”, jak to czynią pierwszoklasiści wtajemniczeni w system dziesiętny. A więc 1 plus 1 to (w notacji binarnej) 10. Wpisujemy teraz w pierwszej od końca kolumnie 0 pod kreską, a 1 przenosimy do drugiej kolumny, żeby tam dodać do 1. To znowu daje 10, wpisujemy więc w tej kolumnie 0 i przenosimy 1 do trzeciej od końca kolumny, tak otrzymując 100.

Co zrobić, żeby poszukując zapisu binarnego nie zaczynać za każdym razem dodawania od początku tj. od jedynki? Trzeba wykorzystać fakt widoczny w kolumnie trzeciej Tabeli Konwersji w tych wierszach, wyróżnionych wytuszczeniem, które wskazują na kolejne potęgi liczby dwa. Zauważamy, że cyfra binarna oznaczająca potęgę liczby dwa ma tyle zer, ile wwynosi wykładnik potęgi.

- $1 = 2^0$ , stąd w „1” nie ma zer (wykładnikiem potęgi dwóch jest zero).
- $2 = 2^1$ , stąd w „10” jest jedno zero.
- $4 = 2^2$ , stąd w „100” jest dwa zera.
- $8 = 2^3$ , stąd w „1000” jest trzy zera.
- $16 = 2^4$ , stąd w „10000” jest cztery zera.

I tak dalej. Odnotujmy na potrzeby dalszych rozważań kilka następnych potęg liczby dwa:

$$2^5 = 32, 2^6 = 64, 2^7 = 128, 2^8 = 256, 2^9 = 512, 2^{10} = 1024.$$

Jak zapisać binarnie liczbę, którą w notacji dziesiętnej zapisujemy np. jako „1930”? Popatrzmy na nią jako na sumę następujących składników:

$$1930 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 8 + 2 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^3 + 2^1$$

Pora opuścić notację dziesiętną i zapisać tę liczbę w notacji binarnej, co prowadzi do następującego zapisu (kropki wprowadzono w nim dla przejrzystości):

$$10.000.000.000 + 1.000.000.000 + 100.000.000 + 10.000.000 + 1.000 + 10.$$

Po zsumowaniu dostajemy cyfrę binarną: 11.110.001.010. Jeśli jest to czyjaś data urodzenia, to wiemy już, jak ją zapisać w paszporcie elektronicznym, żeby ją mógł bezbłędnie i bezwzględnie rozpoznać, powiedzmy, elektroniczny czytnik na przejściu kontrolnym lotniska.

### §3. Dlaczego potęgą zerową dowolnej liczby jest liczba jeden?

W drugim wierszu Tabeli Konwersji jest odnotowany fakt arytmetyczny, który budzi u niektórych pewne niedowierzenie: dlaczego  $2^0 = 1$ ? Raczej nie skutkuje wtedy wyjaśnienie, że jest to szczególny przypadek ogólnego prawa arytmetycznego (niech  $x$  reprezentuje dowolną liczbę naturalną):

$$x^0 = 1.$$

Nasz sceptyk chciałby poznać dowód tego prawa. Jest on, szczęśliwie, niezwykle prosty. Żeby się nacieszyć jego prostotą, trzeba tylko sobie uświadomić dwa inne, bardziej podstawowe prawa, które oznaczmy jako Twierdzenie 1 i Twierdzenie 2 (gwiazdka jest znakiem mnożenia).

$$\text{Tw. 1: } x^m * x^n = x^{m+n} \quad \text{Tw. 2: } x^m : x^n = x^{m-n}.$$

Bezpośrednio skorzystamy z Tw. 2, ale T. 1 jest przydatne „dla towarzystwa”, żeby móc lepiej się wmyśleć w sens tych operacji. Zważmy teraz, co następuje.

$$x^0 = x^{1-1} = x^1 : x^1 = 1.$$

Oczywiście, zamiast uzyskiwać 0 w wyniku odjęcia 1 od 1 można wziąć do tego celu dowolną inną liczbę, ogólnie:  $x^0 = x^{n-n}$ .

Warto też zauważyć, skoro już tyle wiemy o potęgowaniu, że dogodnie jest posłużyć się potęgą ujemną zamiast takim ułamkiem jak  $1/x^n$  powstałym z dzielenia  $1 : x^n$ . Oto wyjaśniające tę rzecz równania:

$$1 : x^n = x^0 : x^n = x^{0-n} = x^{-n}.$$

Kto nie byłby przekonany co do prawdziwości Tw. 2, niech sobie wyobrazi dzielenie dwóch takich iloczynów, w których wszystkie czynniki są takie same, powiedzmy:

$$(3 * 3 * 3 * 3 * 3) : (3 * 3).$$

W wyniku czyli w ilorazie będzie o dwa wyrazy mniej niż w dzielnej, ponieważ nastąpi redukcja o te dwa wyrazy, które składają się na dzielnik; oznacza to odjęcie dwóch od pięciu. Ponieważ ilość powtórzeń trójki w tym iloczynie to tyle, co wykładnik potęgowy liczby 3, mamy tu do czynienia z odejmowaniem jednego wykładnika od innego,  $5 - 3$ ; jest to potęga liczby otrzymanej w wyniku dzielenia. Słowem,  $3^5 : 3^2 = 3^{5-2}$ . ●