8. Zagadnienie równoliczności w świecie zbiorów nieskończonych

§1. Dlaczego filozofia umysłu i sztucznej inteligencji wymaga wiedzy o zbiorach nieskończonych? Żeby sobie na to odpowiedzieć, zacznijmy od rozpoznania, czym się zajmuje, jakie stawia pytania, filozofia sztucznej inteligencji, zwanej skrótowo SI. Wyjaśnienie, które starczy na początek znajdziemy pod adresem: *en.wikipedia.org/wiki/Philosophy_of_artificial_intelligence*.

> The philosophy of artificial intelligence considers the relationship between machines and thought and attempts to answer such question as:
>
> [1] Can a machine act intelligently?
>
> [2] Can it solve any problem that a person would solve by thinking?
>
> [3] Can a machine have a mind, mental states and consciousness in the same sense humans do?
>
> [4] Are human intelligence and machine intelligence the same?
>
> [5] Is the human brain essentially a computer?

Jest to tekst nieco „rozgadany”, w którym pewne pytania powtarzają się co do treści, występując w innej szacie słownej, co jednak może być pomocne dla oswojenia się z tematem. Pytanie centralne (PC), jakby podsumowanie tej listy, jest następujące. **PC: Czy każdy problem rozwiązywalny dla ludzkiego umysłu jest rozwiązywalny dla maszyny cyfrowej – bez pomocy człowieka?**

Ponieważ *inteligencja* to nic innego, jak *zdolność trafnego rozwiązywania problemów*, PC jest pytaniem o to, czy inteligencja maszynowa może dorównać ludzkiej.

Co tu oznacza „pomoc człowieka”? Pomoc ta służy pokonaniu dystansu między zrozumieniem jakiejś prawdy i jej sformułowaniem w języku. Z reguły zrozumienie wyprzedza sformułowania językowe. Do istoty jednak rozumienia naukowego należy to, że prędzej czy później udaje się znaleźć werbalizację wystarczającą zarówno do porozumiewania się uczonych między sobą, jak i do tego, żeby ją przełożyć na język programu dla maszyny (mamy tu na myśli komputer cyfrowy). Jest to zawsze jakieś wzbogacenie zastanego języka, a w tym języku bogatszym, zdolnym sprostać danej problematyce, jeśli nim wzbogacić zasoby maszyny, potrafi ona rozwiązywać zagadnienia z danej klasy problemów. Rozwiązania jednak rodzą w reguły nowe kwestie. Umysł sobie z nimi radzi, nawet gdy nie ma pełnego wsparcia w zastanym jezyku (jedynie jakieś wsparcie częściowe – niezbędne lecz nie wystarczające), poczem zbogaca język na miarę tej nowej potrzeby. A gdy taki język o większej efektywności już człowiek stworzy, może w nim rozwiązywać kolejne problemy, jak też zlecać je do rozwiązywania maszynom.

> Weźmy jakiś najprostszy przykład. Niech będzie nim pytanie: czy ze zdania „Wszyscy członkowie mafii boją się swego szefa” wynika zdanie „Każdy w mafii, oprócz jej szefa, kogoś się boi”? Już dziecko przedszkolne powie, i słusznie, że wynika. Ale maszyna niekoniecznie. To zależy od tego, jaki wmontujemy jej język. Gdyby średniowieczni scholastycy jakimś cudem dostali do dyspozycji komputer, nie umieliby go tak zaprogramować, żeby odpowiedział na powyższe pytanie. A to dlatego, że ówczesna logika nie wypracowała jeszcze języka, w którym formułowałoby się zdania o relacjach, jak np. to, że x boi się y. Taki język wymyślono dopiero w późnym wieku 19-ym i dopiero wtedy można powyższe zdania zapisać tak precyzyjnie, jak to jest konieczne dla maszyny, żeby mogła na nich wykonywać operacje logiczne.

Radykalna teoria Sztucznej Inteligencji – RSI (ang. *strong AI*) daje na PC odpowiedź twierdzącą. Głosi, że maszyna (jeśli nie obecnie to w jakiejś nieodległej przyszłości) będzie czynić to wszystko, co umysł ludzki. To znaczy, rozwiązywać problemy najpierw bez pełnego wsparcia językowego, potem rozwijać dla siebie język, żeby w nim wyrażać uzyskane zrozumienia i wreszcie rozwiązywać formułowane w nim problemy.

Wyważona teoria o Sztucznej Inteligencji – WSI (ang. *weak AI*) odpowiada na PC twierdząco przy opuszczeniu końcowego zwrotu (po myślniku). Dopuszcza więc, że w miarę postępów techniloki w zakresie sprzętu i oprogramowania coraz więcej problemów rozwiązywanych przez ludzi można będzie dawać do rozwiązania maszynom, ale zawsze dopiero wtedy, gdy wcześniej ludzie stworzą język odpowiedni do rozwiązywania w nim problemów z danej klasy.

Za stanowiskiem WSI przemawia argumentacja Alana Turinga, która odwołuje się do teorii zbiorów nieskończonych. Dochodzi się w niej do następującego wniosku.

Nieskończony zbiór problemów matematycznych jest liczniejszy od nieskończonego zbioru programów dla maszyny, które dałoby się napisać w celu rozwiązywania tych problemów.

Istnieją więc kwestie nierozwiązywalne dla maszyn. Czy przynajmnej niektóre potrafiliby rozwiązywać ludze? Jest to zagadnienie w centrum uwagi filozofii umysłu i sztucznej inteligencji. Zajmiemy się nim w odpowiednim momencie, wraz z analizą argumentacji Turinga. W tym zaś punkcie istotne jest zauważenie, że roważania filozoficzne nad SI wymagają wiedzy o zbiorach nieskończonych.

§2. Równoliczność zbiorów. Zbiory nieskończone przeliczalne. Wiadomo, że prawa dłoń liczy tyle samo palców, co lewa. Mówimy, że te dwa zbiory palców są *równoliczne*. Żeby się o tym przekonać, nie trzeba umieć liczyć do pięciu, wystarczy złożyć dłonie jak do modlitwy. Wtedy zobaczymy, że każdemu palcowi jednej ręki odpowiada dokładnie jeden palec drugiej, jest ich więc tyle samo. Podobnie, gdy widzimy kompanię wojska ustawioną w dwuszeregu. Nie musimy liczyć, ilu jest w jednym szeregu, a ile w drugim, żeby się dowiedzieć, że te szeregi są zbiorami równolicznymi. Wystarczy zauważyć, że każdemu żołnierzowi z pierwszego szeregu odpowiada dokładnie jeden (tzn. ani mniej ani więcej) kolega z drugiego.

A jak się dowiedzieć, że jakiś zbiór jest nieskończony? Wystarczy mieć dwie wiadomości. (1) W danym zbiorze zachodzi jakaś relacja porządkująca go w taki sposób, jak stosunek większości ustawia po kolei w szeregu liczby całkowite, poczynając od zera. (2) W zbiorze uporządkowanym relacją większości, dla każdego elementu istnieje element odeń większy. Wyprowadzić stąd wniosek, że zbiór taki nie ma końca, to krok myślowy, na który się nieraz zdobywają już pięcioletnie dzieci. Nie ma więc potrzeby przekonywania o tym dorosłych.

Zbiór liczb naturalnych, czyli całkowitych i nieujemnych, to wzorcowy przypadek zbioru określanego jako *przeliczalny*. Nazwa bierze się stąd, że jego elementy dadzą się liczyć (choć nie zdążymy, nawet przez całą wieczność, policzyć ich do końca). Czy są takie zbiory, których w ten sposób liczyć się nie da? Są i niebawem będzie o tym mowa.

Wymieniliśmy dotąd jeden zbiór przeliczalny: ten, który obejmuje wszystkie liczby naturalne; nazwijmy go zbiorem N. Czy są jeszcze inne? Oczywiście, przeliczalny będzie każdy zbiór równoliczny z N. Pomyślmy, jakie mogą być te inne (tu może Czytelnik zarządzić sobie przerwę na myślenie, nim będzie czytał dalej).

§3. Definicja zbioru nieskończonego. Doszliśmy w paragrafie poprzednim do wstępnej, niejako amatorskiej (uzyskiwanej już przez dzieci) idei zbioru nieskończonego. Pora na definicję bardziej „profesjonalną", a jej punktem wyjścia będzie pytanie kończące poprzedni paragraf.

Rozważmy prościutkie równanie $y = 2x$. Pomimo swej prostoty ujawnia ono fakt zaskakujący: że liczb parzystych jest tyle samo, co wszystkich liczb naturalnych, choć tylko co druga liczba naturalna jest parzysta. Cały więc zbiór N okazuje się być równoliczny ze swą połową! Istotnie, liczb parzystych jest dokładnie tyle, ile wszystkich liczb naturalnych, bo wedle naszego równania kazdej liczbie naturalnej x odpowiada y jako jej podwojeniei i odwrotnie; musi ta odpowiedniość zachodzić w obu kierunkach, skoro jest prawdą, że zachodzi równość $y = 2x$, czyli wzajemne jednoznaczne przyporządkowanie.

Skoro już wpadliśmy na ten trop, to łatwo przyjdzie wykrywać kolejne zbiory nieskończone będące częściami zbioru N. Jeśli utworzymy zbiór liczb biorąc co trzecią liczbę naturalną, czyli według wzoru $y = 3x$, to znowu dostaniemy zbiór nieskończony na modłę przeliczalną. Tak samo, gdy brać liczbę co czwartą, co piątą, co milionową etc., a także kwadraty kolejnych liczb naturalnych, ich sześciany, i tak dalej, bez końca. Każdy z tak powstałych zbiorów jest częścią zbioru N, którą nazywamy *częścią właściwą* – dla odróżnienia od ogólniejszego pojęcia części, przy którym także calość jest swą własną częścią (w sensie przypadku granicznego). Gdy chodzi o część właściwą zboru, nazywa się ona *podzbiorem właściwym.*

Tak dostajemy sławną definicję związaną z nazwiskiem niemieckiego matematyka Richarda Dedekinda (1831-1916).

Zbiór nazywamy <u>nieskończonym</u>, gdy istnieje równoliczny z nim jego podzbiór właściwy.

Dedekind był pierwszym, który ją zaproponował światu matematycznemu, ale gdy idzie o sam pomysł wyprzedził go Bernard Bolzano (1781-1848), wybitny matematyk i filozof czeski, profesor historii religii na uniwersytecie w Pradze.[1]

Nie będzie przesadą, jeśli z psychologicznego punktu widzenia uznany tę definicję za szokującą. Idzie ona w poprzek naszym nawykom myślowym ukształtowanym ewolucyjnie w wyniku obcowania na co dzień wyłącznie ze zbiorami skończonymi. Mamy dobitne historyczne świadectwo tego „szoku" w postaci poglądów Leibniza. W

[1] Bolzano tym i paroma innymi pomysłami o wielkiej doniosłosci matematycznej i logicznej wyprzedził prace innych autorów, ale ponieważ swym poglądami teologicznymi naraził się władzom kościelnym, a w konsekwencji też świeckim (obowiązywał wtedy sojusz tronu i ołtarza), został odsunięty od pracy na uniwersytecie i miał nikłe możliwości publikowania swych wyników; dopiero z czasem zaczynano dostrzegać jego autorstwo w różnych kwestiach (np. jego *Nauka o funkcjach* została wydana dopiero w roku 1930).

jego czasach jeszcze nie próbowano tworzyć definicji zbioru nieskończonego na podstawie owej równoliczności zbioru z jego podzbiorem, ale sam fakt był już poniektórym znany. Znał go np. Galileusz i bardzo się mu dziwił, ale pogodził się z nim jako z faktem. Nie chciał natomiast pogodzić się Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Wielkim umysłom przydarzają się nie tylko wielkie odkrycia, ale i błędy. Błąd Leibniza, gdy krytykował stanowisko Galileusza w tej materii, brał się z uporczywego trzymania się aksjomatu Arystotelesa, występującego także w *Elementach* Euklidesa, że *część musi być mniejsza od całości.*[2] Stracił na tym cały system filozoficzny Leibniza, który ma u podstaw przekonanie, że świat się składa z nieskończenie wielu indywiduów, zwanych monadami. Miało więc dla Leibniza sens mówienie o nieskończoności w materialnym i duchowym świecie, a jego system zyskałby na zwartości, gdyby przyjąć, że ta nieskończoność metafizyczna da się opisać za pomocą matematycznego pojęcia nieskończoności; to drugie jednak było dla autora *Monadologii* nie do przyjęcia.

Z tej wycieczki w czas przeszły pora wynurzyć się znów w naukę i filozofię teraźniejszą. A w niej czekają nas dwie kolejne niespodzianki: że ułamków jest tyle samo, co liczb całkowitych oraz że są zbiory liczniejsze od zbioru ułamków.

[Ciąg dalszy nastąpi. Do kolokwium wiosennego obowiązuje materiał do tego miejsca, tj. przygotowany na 18 marca 2007. Kogo niepokoi ciekawość, jak to jest z ułamkami i zbiorami bardziej licznymi od N, może ją zaspokoić dzięki dostarczonej na wykładzie kserokopii artykułu „Teoria mocy zbiorów” z *Małej encyklopedii logiki.*]

[2] Wiadomości na ten temat, w tym dane źródłowe, podaję w artykule „Leibniz’s mathematical and philosophical approaches to actual infinity. A case of cultural resistance” [w:] *Nihil sine Ratione. VII. Internationaler Leibniz-Kongreß. Berlin 10.-14. September 2001. Vorträge 2. Teil.* Publikacja przez Gottfried-Wilhelm-Leibniz-Gesellschaft 2001. Przedruk w *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric*, 2001, vol. 4(17): *Language, Mind and Mathematics*. Wersja elektroniczna: logika.uwb.edu.pl/studies/vol4.htm.