Rachunek Predykatów jako narzędzie wnioskowania

Tło historyczne. Idea logiki jako narzędzia jest dawna jak sama logika. Wprawdzie tytuł *Organon* (gr. narzędzie) został nadany dziełom logicznym Arystotelesa (384–322 przed Chr.) dopiero w czasach bizantyjskich, ale odpowiadał on trafnie intencjom autora. To samo słowo *organon* oznacza narząd biologiczny. I tak powstaje pouczająca, nawet gdy nieumyślna, gra słów w pytaniu: czy logika stosowana w rozumowaniach jest jak narzędzie wyprodukowane przez ludzi, czy raczej jak narząd dany przez naturę? Na pierwszą składają się teorie logiczne, między innymi te zawarte w *Organonie*, druga — to wrodzona ludzkim umysłom sprawność rozumowania.

Owa logika wrodzona, będąca jakby narządem umysłu, dobrze się sprawia i myśleniu naukowym i w sprawach dnia powszedniego. Przychodzi jednak czas, gdy staje się przed zadaniem, do którego naturalne organy przestają wystarczać i trzeba ich zasięg przedłużyć za pomocą narzędzi. Wtedy uzbrajamy oko w lunetę, głos przenosimy po kablach, itd. Dla intuicji logicznej, owego znakomitego narządu umysłu, moment taki pojawił się w końcu ubiegłego stulecia, a stało się to w matematyce, dyscyplinie celującej w sztuce rozumowania. Powodów było kilka. Złożoność formuł wymagała coraz bardziej precyzyjnego języka symbolicznego, ale nie mogła być nim sylogistyka ignorująca np. formy zdaniowe potrzebne do opisu relacji (równość, większość itp.). Aby sprostać tym potrzebom, Gottlob Frege stworzył język symboliczny logiki predykatów (1879). Inni zaś koryfeusze matematyki postawili wtedy historyczne zadania, wymagające teorii logicznej, mianowicie: unifikacja całej matematyki na fundamencie teorii zbiorów (Georg Cantor) oraz dowód niesprzeczności matematyki tak niezależny od naszych intuicji, by mógł go wykonać nawet komputer (David Hilbert, 1900; techniki komputerowej jeszcze nie było, ale sama idea komputera żywa była w logice od czasów Leibniza).

Niespodziewanym, a nawet dramatycznym, impulsem do rozwoju logiki jako narzędzia teoretycznego było wykrycie sprzeczności w samym fundamencie matematyki — w teorii zbiorów (zwanej też teorią mnogości). Pewne intuicyjne konstrukcje, zdające się w oczywisty sposób prawdziwymi, okazały się antynomialne czyli wewnętrznie sprzeczne. Był to z jednej strony powód do gruntownej refleksji nad językiem logiki, który należało tak zaprojektować, by nie dopuszczał formuł rodzących antynomie, z drugiej zaś strony bodziec do precyzyjnego operowania metodą aksjomatyczną — tak, by antynomiom zapobiegał dobór aksjomatów. Obie metody przyczyniły się znacząco do zrozumienia możliwości, ale i ograniczeń, naszego umysłu.

Konstrukcja rozdziału. Metoda aksjomatyczna, kluczowa dla zrozumienia natury zarówno wnioskowania jak i konceptualizacji, jest omawiana w pierwszym podrozdziale, ktory przedstawia logikę predykatów w wersji pochodzącej od mistrza aksjomatyzacji Davida Hilberta. Innego przykładu dostarcza podrozdział 2 omawiający rozszerzenie logiki predykatów o teorię identyczności, które otwiera nowe pola zastosowań; ta część rozdziału stanowi dogodny kontekst do wprowadzenia pewnych elementów teorii relacji, niezbędnych w dalszej dyskusji (w obszerniejszych wykładach logiki poświęca się teorii relacji osobny rozdział; por. np. ELF, IX).

Podrozdziały 2 i 3 dotyczą logiki jako narzędzia w skromniejszym i bardziej codziennym wymiarze. Nie chodzi już o budowanie całych teorii i badanie ich poprawności, ale o umiejętne wykonywanie pojedynczych rozumowań. Do tego celu najlepiej się nadaje metoda dowodów założeniowych.

Będą przedstawione dwa typy systemów założeniowych. Dla jednego jest charakterystyczne użycie reguły odrywania i innych do niej podobnych (technicznie nazywają się one odmianami tzw. reguły cięcia). Drugi z nich nie zawiera tego rodzaju reguł, a jedyną metodą rozumowania jest dowód nie wprost za pomocą szukania kontrprzykładów do twierdzenia, które ma być dowiedzione; jeśli w systematycznym poszukiwaniu żadnego kontrprzykładu nie daje się znaleźć, świadczy to o prawdziwości twierdzenia. Ta metoda, niejako okrężna, jest procedurą prawie mechaniczną, najmniej wymagającą pomysłowości, stąd jest szczególnie użyteczna dla tych, którzy interesują się logiką głównie jako narzędziem do kontroli poprawności wnioskowań.

1. Ujęcie aksjomatyczne

1.1. Pojęcie aksjomatu. Aksjomaty systemu HA. Ten sposób ujęcia dyscypliny naukowej, który nazywamy **systemem aksjomatycznym** stanowi pewien ideał porządku w dowodzeniu twierdzeń. Polega to na tym, że wyodrębnia się w danej dyscyplinie czy teorii pewną liczbę **twierdzeń pierwotnych**, których się nie dowodzi. Zwykle awansuje się do tej roli niewielką grupę zdań tak oczywiście prawdziwych, że daje to bezpieczeństwo co do prawdziwości zdań udowodnionych na ich podstawie. Każde twierdzenie w systemie dedukcyjnym jest albo pierwotne albo jest udowodnione na podstawie pierwotnych.

Owe zdania pierwotne czyli nie mające dowodu nazywają się **aksjomatami**, zaś **dowód** jakiegoś zdania w danej teorii polega na wyprowadzeniu go z aksjomatów za pomocą reguł inferencyjnych czyli **reguł wnioskowania**. **Reguła inferencyjna** podaje taki sposób przekształcania zdań zwanych **przesłankami**, że wynik przekształcenia, zwany **wnioskiem**, wynika logicznie z przesłanek. Jak rozumieć wynikanie logiczne? Definicja formułowana w kontekście logiki zdań wystarcza do wstępnej charakterystyki dowodzenia. Wstępnej, bo prawa logiki są tam egzemplifikowane tylko rachunkiem zdań, podczas gdy kompletny zbiór praw logiki obejmuje nadto twierdzenia logiki predykatów.

Teoria może być aksjomatyzowana na wiele sposobów, w zależności od tego, którym twierdzeniom przydzielimy rolę aksjomatów i od tego jakie dobierzemy reguły inferencyjne. Podamy obecnie jedną z klasycznych aksjomatyzacji logiki predykatów pierwszego rzędu. Od inicjałów autorów systemu, Hilberta i Ackermanna [1928], nazwiemy go systemem HA.

Wśród aksjomatów HA znajdują się wszystkie twierdzenia logiki zdań. Można z nich otrzymywać przez podstawianie formuły logiki HA. Na przykład, podstawiając w twierdzeniu $((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$ formułę Px za zmienną p i formułę Qx za q, otrzymamy twierdzenie logiki HA:

$$((Px \Rightarrow Qx) \wedge \neg Qx) \Rightarrow \neg Px.$$

Aksjomaty HA są podane w postaci schematycznej, w tym sensie, że nie określa się, jaka jest struktura formuł podpadających pod dany schemat, reprezentowany literą ϕ, ψ, φ etc. Na przykład, wyrażenie $\varphi(x)$ reprezentuje, jako swe podstawienia, wszelkie formuły logiki HA zawierające zmienną indywiduową, np. formuły: Px, Rxv, $\neg Qx$, $\forall_x Px$, $Px \Rightarrow Qx$ itp., gdzie litery 'P', 'Q', 'R' są stałymi predykatowymi. Tak więc wśród podstawień schematu A1 są formuły: $\forall_x Qx \Rightarrow Qy$, $\forall_y Py \Rightarrow Px$, $\forall_y \neg Rxy \Rightarrow \neg Rxz$, $\forall_y (Ruy \Rightarrow \exists_z Ryz) \Rightarrow (Rux \Rightarrow \exists_z Rxz)$ itd.[1]

Przy podstawianiu należy uważać, aby żadna zmienna wolna w φ nie stała się zmienną związaną w wyniku podstawienia. Warunek ten nie jest spełniony np. przy podstawieniu litery 'y' za literę 'x' w formule $\exists_y (y < x)$.

[1] W stosowanym obecnie języku, w którym formuły występują bądź w postaci schematycznej (wkazywanej przez litery greckie) bądź zawierają predykaty jak 'P', 'Q' etc., nadające formule konkretną strukturę, dla podkreślenia tej różnicy zmienne po literze greckiej są ujmowane w nawias, podczas gdy argumenty określonego predykatu następują po nim bezpośrednio, bez ujmowania ich w nawias i bez oddzielania ich przecinkami (inaczej niż w poprzednio definiowanym języku LP_1.)

A1 $\forall_x \varphi(x) \Rightarrow \varphi(y)$;

A2 $\varphi(y) \Rightarrow \exists x \varphi(x)$.

Zdanie A1 powiada, że gdy coś (φ) jest prawdziwe o każdym indywiduum (z rozważanej dziedziny), to jest to prawdziwe o dowolnym konkretnym indywiduum; sens ten bierze się z faktu, że w następniku występuje *zmienna wolna*, czyli taka za którą wolno podstawić nazwę dowolnego indywiduum. Sens zdania A2 jest taki, że jeśli coś jest prawdą o jakimś konkretnym indywiduum, to istnieje indywiduum, o którym to jest prawdą; widać z tego, że aby dowieść istnienia przedmiotu o danej charakterystyce (symbolizowanej tu przez φ), wystarczy wskazać jeden konkretny przedmiot odpowiadający owej charakterystyce. Z tych zdań pierwotnych, mając odpowiedni zestaw reguł, można wywieść wszystkie twierdzenia logiki predykatów.

1.2. Reguły inferencyjne i przykłady dowodów w systemie HA. **Reguły inferencyjne** systemu HA obejmują regułę odrywania [Odr], która służy także do dowodzenia twierdzeń logiki zdań, oraz reguły specyficzne dla logiki predykatów, mianowicie [DON], tj. regułę **dołączania kwantyfikatora ogólnego do następnika implikacji**, oraz [DEP], tj. **dołączania kwantyfikatora egzystencjalnego do poprzednika implikacji**. Oto reguła **odrywania**.

[Odr] Z $\psi \Rightarrow \phi$ i ψ wnioskujemy ϕ.

Niech $\phi(x)$ oznacza dowolną formułę, w której x jest zmienną wolną, i niech ψ oznacza dowolną formułę, w której x nie jest zmienną wolną. Mając na uwadze ów warunek, formułujemy jak następuje reguły specyficzne logiki predykatów HA:

[DON] Z $\psi \Rightarrow \phi(x)$ wnioskujemy $\psi \Rightarrow \forall_x \phi(x)$;

[DEP] Z $\phi(x) \Rightarrow \psi$ wnioskujemy $\exists_x \phi(x) \Rightarrow \psi$.

Nieodzowność podanego wyżej zastrzeżenia, by zmienna wolna w ϕ nie była wolna w ψ, widać z następującego przykładu. Gdybyśmy zastosowali [DON] do prawdziwej formuły arytmetycznej: $(x < 5) \Rightarrow (x < 6)$, gdzie x jest zmienną wolną nie tylko w następniku ϕ, lecz także (wbrew powyższemu zastrzeżeniu) w poprzedniku ψ, to byśmy otrzymali formułę: $(x < 5) \Rightarrow \forall_x (x < 6)$. Z kolei, przez podstawienie, otrzymałoby się formułę $(4 < 5) \Rightarrow \forall_x (x < 6)$, która jest fałszywa, gdyż jej poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy. Podobnie, stosując [DEP] oraz podstawienie do formuły $(x < 5) \Rightarrow (x < 6)$, otrzymalibyśmy fałszywe zdanie $\exists_x (x < 5) \Rightarrow (7 < 6)$.

By uchwycić intuicyjny sens operacji [DON], trzeba mieć na uwadze, że zdanie $\psi \Rightarrow \phi(x)$ powiada, iż z ψ wynikają kolejne podstawienia za $\phi(x)$; jeśli ta druga formuła dotyczy, powiedzmy, liczb naturalnych (np. powiada, że każda z nich ma następnik), to musi być ona prawdziwa dla każdej liczby naturalnej, a to właśnie jest treścią reguły [DON]. Rozważmy z kolei regułę [DEP]. Jeżeli ψ jest implikowane przez $\phi(x)$, to albo ψ jest prawdziwe, albo $\phi(x)$ jest fałszywe. Jeżeli ψ jest prawdziwe, to implikacja jest zawsze prawdziwa, niezależnie od wartości logicznej poprzednika. Jeżeli wyrażenie $\phi(x)$ jest fałszywe, to nie istnieje przedmiot spełniający $\phi(x)$, a stąd $\exists_x \phi(x)$ jest również fałszywe; tak więc implikacja zachowuje swą prawdziwość.

Z reguły pierwotnej [DON] można otrzymać regułę wtórną, zwaną **regułą uogólniania** czyli **generalizacji**.

[Gen] Z $\phi(x)$ wnioskujemy $\forall_x \phi(x)$.

Oto jej dowód uzyskany z praw rachunku zdań (które w całości włączyliśmy do naszej aksjomatyki) za pomocą reguły [DON]. Przyjmujemy, że $\phi(x)$ jest udowodnionym twierdzeniem lub aksjomatem rozważanej teorii. W prawie rachunku zdań $q \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow q)$ za q podstawimy $\phi(x)$ i tak otrzymujemy, kolejno:

1	$\phi(x) \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow \phi(x))$	prawo rach. zdań
2	$\phi(x)$	przyjęte twierdzenie

3 $(p \Rightarrow p) \Rightarrow \phi(x)$ [Odr]: 1, 2

4 $(p \Rightarrow p) \Rightarrow \forall_x \phi(x)$ [DON]: 3

Ponieważ poprzednik w wierszu 4 jest prawdziwy (jako prawo logiki), reguła [Odr] pozwala na uznanie następnika, którym jest wyjściowe twierdzenie poprzedzone kwantyfikatorem ogólnym.

Oprócz operacji określonych powyższymi regułami, stosowana jest operacja **podstawiania** za zmienne zdaniowe; ma ona zastosowanie w takim systemie jak obecny, gdzie przyjmuje się za aksjomaty wszystkie prawa logiki zdań (por. niżej, dowód T1). Oto sformułowanie odpowiedniej reguły.

[Pod] Na podstawie uznanego twierdzenia ze zmiennymi wolnymi wolno uznać zdanie powstające z tego twierdzenia przez zastąpienie zmiennych wolnych innymi wyrażeniami z tej samej kategorii składniowej, za te same zmienne podstawiając wszędzie te same wyrażenia — pod warunkiem, że żadna zmienna, która w tym twierdzeniu była wolna nie stanie się w wyniku zastąpienia związana.

Zastrzeżenie zabraniające związania zmiennych uprzednio wolnych nie dotyczy, oczywiście, rachunku zdań, w którym nie ma zmiennych innych niż wolne.[2]

Przykłady dowodów.

Niech symbole T1, T2 itd. oznaczają twierdzenia systemu HA. Udowodnimy przykładowo dwa twierdzenia, ilustrując tym metody dowodzenia właściwe systemom aksjomatycznym.

Dowód twierdzenia T1: $\forall_x(\phi(x) \vee \neg\phi(x))$.

1 $p \vee \neg p$ logika zdań

2 $\phi(x) \vee \neg\phi(x)$ [Pod]: 1

3 $\forall_x(\phi(x) \vee \neg\phi(x))$ [Gen]: 2

Dowód twierdzenia T2: $\forall_x(\phi \vee \psi(x)) \Rightarrow (\phi \vee \forall_x \psi(x))$.

1 $\forall_x(\phi \vee \psi(x)) \Rightarrow (\phi \vee \psi(x))$ [Pod]: A1

2 $\forall_x(\phi \vee \psi(x)) \Rightarrow (\neg\neg\phi \vee \psi(x))$ rach zdań: 1

3 $\forall_x(\phi \vee \psi(x)) \Rightarrow (\neg\phi \Rightarrow \psi(x))$ rach. zdań: 2

4 $\forall_x(\phi \vee \psi(x)) \wedge \neg\phi) \Rightarrow \psi(x)$ rach. zdań: 3

5 $\forall_x(\phi \vee \psi(x)) \wedge \neg\phi) \Rightarrow \forall_x \psi(x)$ [DON]: 4

6 $(\phi \vee \psi(x)) \Rightarrow (\neg\phi \Rightarrow \forall_x \psi(x))$ rach. zdań: 5

7 $(\phi \vee \psi(x)) \Rightarrow (\phi \vee \forall_x \psi(x))$ rach. zdań: 6

Odwołanie się do rachunku zdań w niektórych wierszach dowodu oznacza, że aby uzyskać formułę występującą w danym wierszu, trzeba skorzystać z odpowiedniego prawa rachunku, stosując do niego operację podstawiania.

Wiele przykładów dowodów opartych na powyższych aksjomatach i regułach znajduje się w dziele Hilberta i Ackermanna [1928]. Dowody oparte na odmiennym zbiorze aksjomatów i reguł znajdują się u Grzegorczyka [1981]. W następnym odcinku zostaną podane, już bez dowodów, inne twierdzenia dające się stosunkowo łatwo dowieść w systemie HA. Byłyby to jednak dowody bardziej żmudne niż te, które są dostępne w systemach dedukcji naturalnej (omawianych w następnych partiach tego rozdziału), toteż poprzestaniemy na dwóch podanych wyżej przykładach.

[2] Por. Łukasiewicz [1929], Mostowski [1948]. Jest to raczej swobodne sformułowanie reguły podstawiania; precyzyjne technicznie sformułowanie można znaleźć w *Słowniku* Pogorzelskiego [1992]).

1.3. Wybrane twierdzenia logiki predykatów, ich stosunek do języka naturalnego. Zanim będzie się rozważać inne niż aksjomatyczna metody dowodzenia (zob. podrozdziały 4 i 5), jest miejsce na pytanie, jak mają się prawa logiki predykatów do sposobów wnioskowania w języku naturalnym. Twierdzenia T1 i T2 z poprzedniego odcinka mogą być o tyle zniechęcające, że opisują jakieś przestawianie symboli, w którym trudno dopatrzeć się podobieństwa do naszych rzeczywistych rozumowań. O ich wyborze zadecydowała łatwość i krótkość dowodzenia, a faktem jest, że z kolosalnego zbioru twierdzeń logiki predykatów tylko ograniczona ich liczba znajduje zastosowanie w praktyce, dzięki czemu ma wyraźne odpowiedniki w strukturach języka naturalnego.[3]

Podane dalej twierdzenia są sformułowane nie w całej ogólności, która przysługuje wyrażeniom zapisywanym wyżej za pomocą liter greckich (wprowadzonych po to, by reprezentować formuły zdaniowe o dowolnej złożoności). Żeby uprościć wizualnie i przez to uczytelnić zapisy, będziemy używali predykatów, jedno- lub dwuargumentowych, symbolizowanych literami P, Q, R, rezygnując też, dla krótkości, z brania argumentów w nawias i oddzielania ich przecinkami. Będą to więc przykładowe podstawienia praw logiki, wystarczające jednak, by oddać to, co istotne w strukturze owych praw.

Oto wybrane twierdzenia, które zostaną następnie skomentowane.

T3: $\forall_x Px \equiv \neg\exists_x\neg Px$

T4: $\exists_x Px \equiv \neg\forall_x\neg Px$

T5: $\forall_x(Px \wedge Qx) \equiv (\forall_x Px \wedge \forall_x Qx)$

T6: $\exists_x(Px \wedge Qx) \Rightarrow (\exists_x Px \wedge \exists_x Qx)$

T7: $\exists_x(Px \vee Qx) \equiv (\exists_x Px \vee \exists Qx)$

T8: $(\forall_x Px \vee \forall_x Qx) \Rightarrow \forall_x(Px \vee Qx)$

T9: $\forall_x(Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow (\forall_x Px \Rightarrow \forall_x Qx)$

T10: $\forall_x(Px \Rightarrow Qx) \equiv \neg\exists_x(Px \wedge \neg Qx)$

T11: $\forall_x\forall_y Rxy \equiv \forall_y\forall_x Rxy$

T12: $\exists_x\exists_y Rxy \equiv \exists_y\exists_x Rxy$

T13: $\exists_y\forall_x Rxy \Rightarrow \forall_x\exists_y Rxy$.

Zdanie T3 można wykorzystać jako definicję kwantyfikatora ogólnego za pomocą egzystencjalnego i negacji, a T4 jako definicję egzystencjalnego przez ogólny z negacją. W systemie HA żadna z takich definicji nie jest potrzebna, ponieważ oba, a nie tylko jeden, kwantyfikatory są wprowadzone za pomocą stosownych aksjomatów i reguł. Można jednak skonstruować system, w którym tylko kwantyfikator egzystencjalny byłby terminem pierwotnym, to jest występującym w aksjomatach, zaś kwantyfikator ogólny zostałby wprowadzony definicyjnie. Można by też zacząć od kwantyfikatora ogólnego i negacji jako pierwotnych, a następnie wprowadzić definicyjnie egzystencjalny. Te stosunki między kwantyfikatorami mają odpowiedniki w języku naturalnym. Dla T3 jest to fakt, że zdanie *każdy jest przekupny* można zastąpić zdaniem *nie ma takich, co by nie byli przekupni*. Dla T4 jest to zamienność między zdaniami *istnieją dobrzy ludzie* oraz *nieprawda, że nikt* (*z ludzi*) *nie jest dobry*.

Zwróćmy też uwagę, że negując obie strony w równoważnościach T3 i T4 (co prowadzi znowu do zdań prawdziwych), otrzyma się dalsze prawa dotyczące stosunków pomiędzy kwantyfikatorami

[3] W gruncie rzeczy, zbiór twierdzeń logiki jest nieskończony przeliczalnie, tzn. tą nieskończonością, która jest właściwa zbiorowi liczb naturalnych (używanych do numerowania twierdzeń). Jest to oczywiste, gdy się zważy, że każde dwa prawa logiki połączone np. symbolem koniunkcji dają nowe prawo (dotyczy to także innych funktorów), co powoduje wzrost ich liczby do nieskończoności.

i negacją, zwane prawami de Morgana dla kwantyfikatorów – od nazwiska angielskiego algebraika z XIX w.; analogiczne prawa zachodzą w rachunku zdań dla relacji pomiędzy negacją oraz koniunkcją (odpowiednik kwantyfikatora ogólnego) i alternatywą (odpowiednik kwantyfikatora egzystencjalnego).[4]

Następne pięć praw dotyczy rozdzielania kwantyfikatorów pomiędzy człony różnych funkcji prawdziwościowych lub też wyprowadzania ich przed całość danej funkcji. Prześledziwszy te zależności, można zauważyć ich podobieństwo do zależności między spójnikami i kwantyfikatorami języka polskiego. Na przykład, T5 oddaje równoważność między zdaniem *każdy jest młody i bogaty* oraz zdaniem *każdy jest młody i każdy jest bogaty*.

Co się tyczy T6, zależność zachodzi tylko w jedną stronę. Implikacja odwrotna, mianowicie:

$$(\exists_x Px \& \exists_x Qx) \Rightarrow \exists_x (Px \& Qx)$$

nie jest prawem logiki. Można to wykazać przez dobór odpowiedniego **kontrprzykładu**, tj. takiego stanu rzeczy, w którym — w przypadku implikacji — poprzednik będzie prawdziwy, a następnik fałszywy. Oto prosty kontrprzykład do powyższej formuły. Niech rozważaną dziedziną będzie zbiór liczb całkowitych, co znaczy że zmienną ‘x’ należy odczytywać zwrotem ‘liczba całkowita’. Dalej, odczytajmy ‘P’ jako predykat ‘jest liczbą parzystą’, a ‘Q’ jako predykat ‘jest liczbą nieparzystą’. Wtedy poprzednik powyższej implikacji jest prawdziwy, bo istnieją liczby parzyste oraz istnieją nieparzyste, zaś następnik jest fałszywy, bo nie jest prawdą, że istnieje liczba zarazem parzysta i nieparzysta.

Zdanie T7 określa pewien stosunek między alternatywą i kwantyfikatorem egzystencjalnym. Można, mianowicie, ten kwantyfikator rozdzielić między człony alternatywy (implikacja od lewej do prawej) i można go też wyłączyć przed alternatywę (implikacja od prawej do lewej). Co się tyczy stosunku między alternatywą i kwantyfikatorem ogólnym, określa go implikacja T8. Implikacja odwrotna nie zachodzi, nie ma więc równoważności, co można znowu wykazać kontrprzykładem. Ma on obalić formułę:

$$\forall_x (Px \vee Qx) \Rightarrow (\forall_x Px \vee \forall_x Qx).$$

Niech rozważaną dziedziną będzie zbiór ciał niebieskich, jednym z predykatów ‘jest gwiazdą’, a drugim ‘jest nie-gwiazdą’ (a więc planetą, kometą etc.). W tej dziedzinie poprzednik powyższej implikacji jest prawdziwy (każde ciało niebieskie jest gwiazdą lub nie-gwiazdą), następnik zaś fałszywy, bo nie jest prawdą żaden z członów alternatywy, ani ten, że każdy obiekt na niebie jest gwiazdą, ani ten, że każdy jest nie-gwiazdą (co oczywiście, można wyrazić płynniej, że nie jest gwiazdą).

Zdanie T9 stwierdza rozdzielność kwantyfikatora ogólnego względem implikacji. Implikacja odwrotna (tj. wyprowadzanie kwantyfikatora przed implikację) nie zachodzi, a po kontrprzykład sięgnijmy (choćby dla rozmaitości) do repertuaru predykatów pustych, tzn. takich, które o żadnym przedmiocie nie dadzą się prawdziwie orzec. Niech ‘W’ będzie predykatem ‘jest dobrą wróżką’ a ‘B’ predykatem ‘jest blondynką’, a dziedziną, w której rozgrywa się akcja niech będzie zbiór wszystkich pań (one są więc teraz „iksami”, o których opowiada nasza formuła). Zbadajmy, czy da się obronić prawdziwość implikacji:

$$(\forall_x Bx \Rightarrow \forall_x Wx) \Rightarrow \forall_x (Bx \Rightarrow Qx).$$

Jej następnik jest fałszywy, bo skoro nie ma w ogóle wróżek, to żadna blondynka nie jest wróżką. Poprzednik natomiast jest (sam będąc implikacją) prawdziwy z racji fałszywości swego własnego poprzednika, który twierdzi wbrew faktom, że każda pani jest blondynką; w tej sytuacji możemy nawet darować sobie dociekanie prawdziwości następnika (czy każda pani jest dobrą wróżką?), bo niezależnie od wyniku poprzednik (całej implikacji) pozostanie prawdziwy. A to przy fałszywym następniku falsyfikuje (czyli czyni fałszywą) rozważaną implikację.

[4] Prawa de Morgana są obszerniej omówione poniżej, przy sposobności wykorzystania ich jako przykładów dowodzenia, w odcinku 4.5.

Do tego wniosku dojdą nie tylko pesymiści, którzy nie wierzą w dobre wróżki. Mogą dać własny kontrprzykład także optymiści, uznający ich istnienie. Trzeba jedynie, by się zgodzili, że nie wszystkie blondynki są dobrymi wróżkami (a tylko, powiedzmy, niektóre), co sfalsyfikuje następnik całej implikacji, oraz by zadbali o prawdziwość jej poprzednika, który sam będąc implikacją nabędzie prawdziwości dzięki swemu fałszywemu poprzednikowi; a żeby ten ostatni był fałszywy, wystarczy (jak w poprzednim kontrprzykładzie, autorstwa pesymistów), że nie każda pani jest blondynką.[5]

Zdania od T5 do T9 dotyczą rozdzielania kwantyfikatorów, opisując tym ważne fakty logiczne. Pierwsze jednak miejsce gdy idzie o zastosowania należy przyznać następującemu po nich prawu T10. Wyraża ono jedną z najpraktyczniejszych prawd logiki: uczy jak obalać implikację z kwantyfikatorem ogólnym, co wobec zalewu błędnych uogólnień jest szczególnie cenną umiejętnością. Widać z tej równoważności, że aby obalić ogólne zdanie warunkowe trzeba udowodnić istnienie takiego przedmiotu, o którym prawdą jest poprzednik tego zdania, a nieprawdą następnik. A z kolei, jak dowodzić istnienia uczy to prawo, które poznaliśmy jako aksjomat systemu HA: wystarczy wskazać (bodaj jeden) przedmiot o pewnej własności, by być uprawnionym do stwierdzenia, że istnieją przedmioty o tej własności.

Jest to wyborna broń przeciw nie liczącym się z faktami stereotypom. Pogląd, że wszyscy jedynacy są egoistami obalamy przez wskazanie na jedynaka altruistę (w dialekcie logiki predykatów odpowiada temu zdanie: istnieje taki *x*, że *x* jest jedynakiem i nie jest egoistą). Opinia, że (wszyscy) Szkoci są skąpi okazuje się mylna, gdy wskaże się na szczodrego przedstawiciela tej nacji. Temu, że każdy artysta stroni od techniki zaprzecza casus Leonarda da Vinci. I tak dalej.

Ostatnie trzy prawa dotyczą predykatów dwuargumentowych. Dwa pierwsze z nich, tj. T11 i T12 są na tyle oczywiste, że nie potrzebują komentarza. Są one użyteczne jako tło dla trzeciego, w którym mamy do czynienia nie z równoważnością lecz z implikacją. Powstaje pytanie, czy zachodzi implikacja odwrotna, to jest:

$$\forall_x \exists_y Rxy \Rightarrow \exists_y \forall_x Rxy.$$

Okazuje się, że nie zachodzi, co można wykazać kontrprzykładem. Niech R będzie stosunkiem większości między liczbami całkowitymi. Przy tej interpretacji poprzednik jest prawdą, bo istotnie dla każdej liczby istnieje liczba od niej większa, co daje nieskończony zbiór liczb; ta zaś nieskończoność sprawia, że fałszywy jest następnik, który powiada, że istnieje liczba większa od każdej liczby. Także w dziedzinach mniej abstrakcyjnych łatwo o kontrprzykłady. Niech będzie to jakiś krąg bojaźliwych, gdzie każdy kogoś się boi; z tego jednak nie wynika, że istnieje ktoś, kogo boją się wszyscy.[6]

Taka różnorodność przykładów pokazuje, jak wiele można wysłowić w języku logiki predykatów. Nie zawsze jednak ten schemat syntaktyczny, nakazujący trzymać się układu predykat-argumenty, jest tak operatywny, jak byśmy potrzebowali dla sprawnego rozumowania. Istotnym ulepszeniem języka jest wprowadzenie doń jeszcze jednej stałej logicznej, mianowicie symbolu identyczności. Czyni się to na drodze aksjomatycznej, kontynuując podejście metodologiczne do logiki przedstawione wyżej na przykładzie systemu HA.

2. Teoria identyczności

[5] Zdanie T9 jest dowodzone dalej dwukrotnie, za każdym razem inną metodą: w odcinku 4.3 (przykład `P.5`) metodą dowodu wprost wedle reguł jednego z systemów dedukcji naturalnej, a w odcinku 5.3 metodą dowodu nie wprost, w wersji dostarczającej kontrprzykładu. Te przykładowe dowody są pomyślane jako wzorce dowodzenia, które mogą być zastosowane również do każdego innego z twierdzeń z listy T1 – T13.

[6] Dowód zdania T13 podany jest dalej dwukrotnie: w odcinku 4.3 jako przykład `P.1`, gdzie jest dowodzony metodą wprost, i w odcinku 5.3, gdzie jest dowodzony metodą nie wprost; w tym drugim znajduje się także argumentacja, że implikacja odwrotna do T13 nie jest prawem logiki.

2.1. Dlaczego jeszcze jedna stała logiczna? Uzbierały się nam do tej pory dwa komplety stałych logicznych: jeden z logiki zdań, w którym mamy do dyspozycji funktory negacji, koniunkcji, alternatywy i równoważności (a jeśli zechcemy, to i więcej), drugi zaś z logiki predykatów, zawierający kwantyfikatory ogólny i egzystencjalny. Pytanie, czy mogą być jeszcze inne stałe logiczne skłania do zastanowienia, jak zdefiniować pojęcie stałej logicznej, jeśli nie chcemy poprzestać na określeniu zbioru takich stałych przez proste wyliczenie. Wymaga to pewnej refleksji nad naturą logiki.

Refleksja taka pochodzi od Gottfrieda Wilhelma Leibniza (1646–1716), prekursora matematyzacji i mechanizacji wnioskowania, który był tyleż genialnym filozofem, co matematykiem. Jako filozof żywił on myśl o nieskończonej liczbie światów możliwych, także tych niezrealizowanych, z których jedne mogłyby być podobne do naszego, a różnić się tylko pewnymi faktami historii, inne zaś miałyby całkiem inną historię, jeszcze inne byłyby zaludniane z gruntu odmiennymi gatunkami istot, a niektóre podlegałyby prawom całkiem innej fizyki. We wszystkich jednak musiałaby obowiązywać ta sama logika. Prawa logiki bowiem są zbudowane z takich pojęć, które zachowują ważność niezależnie od tego, jakie fakty i jakie prawa fizykalne zachodzą w danym świecie. Jeśli w którymś żyłyby, powiedzmy, ogniste smoki, to pozostanie zawsze prawdą, że smok jest smokiem, niezależnie od tego, jakim podlega prawom biologii czy fizyki. Prawdy obowiązujące w każdym z możliwych światów są prawami logiki.

Istnieje klasa prawd w taki właśnie sposób uniwersalnych, a nie dających się wysłowić w dotychczas opisanym języku logiki predykatów. Są to zdania zbudowane z samych zmiennych oraz symbolu **identyczności**, zwanej też *tożsamością*, a niekiedy *równością*. Symbol ten, jak dobrze wiemy z praktyki matematycznej, odgrywa w naszych rozumowaniach rolę nie do zastąpienia, toteż ten wzgląd na rozległość zastosowań, jak i ów charakter uniwersalny symbolu identyczności przemawiają za przyjęciem go do rodziny stałych logicznych.

Do zapoznania się z teorią identyczności trzeba się przygotować na dwa sposoby. Jednym z nich jest rozważenie różnych własności relacji, by spośród nich dobrać te, które będą charakteryzować stosunek identyczności. Drugie zaś przygotowanie polega na wyjaśnieniu procedury aksjomatyzacji, niezwykle doniosłej dla procesów konceptualizacji; będzie sposobność zapoznać się z tą procedurą przy wprowadzaniu pojęcia identyczności, ponieważ jego treść jest charakteryzowana przez pewien układ aksjomatów.

2.2. Rodzaje relacji. Własności relacji muszą być relatywizowane do określonych zbiorów. Na przykład, relacja podzielności (bez reszty) zachodzi dla każdej pary obiektów w zbiorze liczb ułamkowych (do którego należą liczby będące wynikami dzielenia), lecz nie dla każdej pary w zbiorze liczb całkowitych. Tego rodzaju relatywizacja dotyczy także własności, o których będzie dalej mowa; znaczy to, że rozpatruje się zawsze relację w jakimś zbiorze.

Relacja nazywa się **zwrotna**, gdy dla każdego elementu x z danego zbioru, spełniony jest warunek:

$$xRx.$$

Relacją zwrotną w zbiorze ludzi jest np. podobieństwo (każdy jest podobny do samego siebie), a nie jest, jeśli wierzyć przysłowiu, stosunek osądzania („nikt nie jest sędzią we własnej sprawie”).

Relacja nazywa się **symetryczna**, gdy dla wszelkich elementów $x,\ y$ z danego zbioru zachodzi warunek:

$$jeeli\ xRy,\ to\ yRx.$$

Symetrycznym stosunkiem jest np. sąsiedztwo na osi liczb, a nie jest nim w zbiorze liczb mniejszość.

Relacja nazywa się **przechodnia**, gdy dla wszelkich elementów $x,\ y,\ z$ z danego zbioru zachodzi warunek:

$$jeeli\ xRy\ i\ yRz,\ to\ xRz.$$

Przechodnim stosunkiem w zbiorze przedmiotów materialnych jest np. równobarwność, a nie jest przechodnim podobieństwo barwy (o czym świadczy naocznie tęcza).

Te trzy cechy przysługują identyczności, jak to dalej zostanie zapisane w sposób formalny. Należy w tym kontekście wspomnieć o innych jeszcze cechach, które przydarzają się relacjom, pomoże to bowiem uwydatnić to, co dla identyczności jest specyficzne.

Relacja nazywa się **antysymetryczna**, gdy dla wszelkich elementów $x,\ y$ z danego zbioru zachodzi warunek:

$$jeeli\ xRy,\ to\ nie\ jest\ prawd,\ e\ yRx.$$

Antysymetryczne są wszelkie postacie mniejszości i większości, np., w zbiorze brył, posiadanie większej masy.

Relacja nazywa się **spójna**, gdy dla wszelkich przedmiotów $x,\ y$ z danego zbioru, o ile x jest różne od y zachodzi warunek:

$$xRy\ lub\ yRx.$$

Stosunek mniejszości jest spójny w zbiorze liczb całkowitych, bo dla każdych dwóch liczb różnych od siebie jest prawdą, że któraś z nich jest mniejsza od drugiej. Natomiast relacja wyrażana słowem ‘kochać’ nie wydaje się być spójna w zbiorze ludzi, podczas gdy spójna ma być, wedle pewnego zgryźliwego satyryka, relacja bania się kogoś: gdyby tak było, to dla każdych dwóch różnych ludzi któryś z nich boi się drugiego.

Każda z wymienionych cech jest niezależna od pozostałych, to znaczy może przysługiwać relacji nie pociągając przysługiwania pozostałych. Łącząc z kolei te cechy w pewne układy, otrzymamy złożone własności relacji. Wśród nich są dwie szczególnie ważne z logicznego punktu widzenia. Oto ich definicje.

Relacja nazywa się **równościowa** w pewnym zbiorze, gdy jest w tym zbiorze zwrotna, symetryczna i przechodnia. Relacja równościowa nazywa się też krótko **równością** (spotyka się też w ich miejscu terminy ‘relacja równoważnościowa’ i ‘równoważność’).

Relacja nazywa się **porządkująca liniowo** pewien zbiór, gdy jest w nim spójna, antysymetryczna i przechodnia.

O pewnej własności stosunków była już mowa wcześniej, ponieważ było to konieczne dla wyjaśnienia, co to jest funkcja, by móc z kolei wprowadzić pojęcie funkcji prawdziwościowej. Powtórzymy to określenie, ale w sposób bardziej systematyczny i w najbardziej odpowiednim dlań kontekście, którym są obecne rozważania.

Relacja R nazywa się **funkcją**, inaczej **relacją jednoznaczną**, określoną na elementach zbioru X i o wartościach ze zbioru Y, gdy

(α) *dla każdego elementu x zbioru X* istnieje *taki element y należący do zbioru Y, że xRy*;

(β) *dla każdego elementu x zbioru X istnieje* tylko jeden *element y należący do Y taki, że xRy.*

Przykładów takich relacji dostarczają funkcje prawdziwościowe rozpatrywane w rozdziale trzecim. Inny przykład: funkcja $y = 2x$ może być traktowana jako określona na zbiorze liczb naturalnych i przyjmująca wartości ze zbioru liczb parzystych; innymi słowy, każdej liczbie naturalnej funkcja ta przyporządkowuje jedną i tylko jedną liczbę parzystą.

Gdy relacja jednoznaczna zachodzi w obu kierunkach, jak np. relacja małżeństwa w społeczeństwie monogamicznym, to nazywa się ona **wzajemnie jednoznaczna**.

Istotna część wprowadzonych wyżej pojęć dotyczących rodzajów relacji będzie przydatna w rozpatrywaniu identyczności, inne znalazły zastosowanie w rozdziale trzecim, jeszcze inne zostaną wykorzystane w rozdziale szóstym.

2.3. Aksjomatyczna charakterystyka identyczności. Identyczność należy do szerszej klasy relacji zwanych równościami, to znaczy relacji przechodnich, zwrotnych i symetrycznych. Ale nie każda równość jest identycznością. Na przykład stosunek rówieśnictwa jest równością, ale rówieśnicy nie są identyczni, nawet gdy są bliźniakami. Identyczność posiada jeszcze własność, która ją odróznia od innych równości, mianowicie tę, że gdy dwa przedmioty są identyczne, to cokolwiek da się orzec prawdziwie o jednym, jest też prawdziwe o drugim; nie tak ma się sprawa z bliżniakami czy sobowtórami, dlatego nie są one identyczne, nawet gdy pod wieloma względami są równe czyli takie same. Znaczy to, oczywiście, że dwa przedmioty identyczne są w gruncie rzeczy jednym przedmiotem.

Własność ta ma również swą nazwę, mianowicie **ekstensjonalność**. Tak więc cztery twierdzenia, każde dotyczące innej cechy, całkowicie charakteryzują identyczność.

W pewnym sensie, wystarczają do charakterystyki dwa z tych czterech, mianowicie zwrotność i ekstensjonalność. Pozostałe dadzą się udowodnić przez wyprowadzenie z tych dwóch podstawowych, przyjmowanych jako aksjomaty teorii identyczności. Oczywiście, da się wyprowadzić z tych aksjomatów o wiele więcej twierdzeń, ale te dwa, symetryczność i przechodniość są szczególnie ważne ponieważ świadczą o tym, że identyczność należy do klasy relacji zwanych równościami.

Oto zdania przyjęte jako aksjomaty.

$x = x$	zwrotność;
$(x = y) \Rightarrow (\phi(x) \Rightarrow \phi(y))$	ekstensjonalność.

A oto własności wyprowadzalne z aksjomatów.

$(x = y) \Rightarrow (y = x)$	symetryczność;
$((x = y) \wedge (y = z)) \Rightarrow (x = z)$	przechodniość.

Symetryczność wynika natychmiast ze zwrotności, gdy na podstawie ekstensjonalności przyjmie się regułę WZ (wnioskowania przez zastępowanie), którą w swobodny sposób można wyrazić, jak następuje.

WZ Gdy x i y są identyczne, to z formuły ϕ mówiącej coś o x można wywnioskować formułę, która różni się od ϕ tylko tym, że 'x' zastąpiono przez 'y' (pod warunkiem, że nie zastępuje się zmiennych związanych i że żadna zmienna wolna nie staje się w miejscu zastąpienia związaną).

Na tej podstawie, gdy $x = y$, wolno w każdym zdaniu mówiącym coś o x zastąpić 'x' przez 'y'. Takim zdaniem jest aksjomat '$x = x$'; zastępujemy więc pierwsze wystąpienie symbolu 'x' symbolem 'y', otrzymując '$y = x$'. Skoro zaś z '$x = y$' daje się poprawnie wywnioskować '$y = x$', to nie może być tak, by drugie było fałszywe, gdy pierwsze jest prawdziwe, a zatem prawdą jest implikacja '$x = y \Rightarrow y = x$', czyli prawo symetryczności. Analogicznie możemy dowieść przechodniości identyczności.

3. Co to jest reguła wnioskowania

3.1. Twierdzenia, normy, reguły. Opis logiki skonstruowanej jako system reguł należy poprzedzić objaśnieniem pojęcia reguły. Pomocnym do tego kontekstem są terminy 'twierdzenie' i 'norma'. Funkcjonują one w mowie ludzi wykształconych, ale nie zawsze w taki sposób, który by nie wymagał uzupełnień czy ulepszeń.

Pierwszy krok w tym przedsięwzięciu zawdzięczamy gramatyce. Odróżnia się w niej **zdania oznajmujące** i **rozkazujące**. Te pierwsze służą do opisywania świata za pomocą twierdzeń, te drugie do zmieniania go poprzez oddziaływanie na ludzkie zachowania. 'Niektórzy nie kradną' to twierdzenie opisowe w formie zdania oznajmującego, zaś 'nie kradnij' to zdanie rozkazujące, mające wpłynąć na postępowanie. Twierdzenia opisują świat prawdziwie lub fałszywie, czyli przysługuje im **wartość logiczna** (por. rozdz. trzeci, odc. 1.2). Rozkazom nie przysługuje wartość logiczna, bo nie są one opisami, które mogłyby być zgodne lub niezgodne z opisywaną rzeczywistością.

Gdy zdanie rozkazujące dotyczy nie aktu jednorazowego ('zamknij to okno') lecz ustanawia jakiś powszechny sposób postępowania, mówimy, że wyraża ono pewną **normę**. Takimi normami są np. przykazania Dekalogu. Odróżnia się normy prawne, ustanowione przez kompetentną do tego władzę, od norm moralnych, których pochodzenie jest mniej oczywiste i różnie bywa tłumaczone (w zależności np. od poglądów filozoficznych). Norma nie musi być wyrażana w formie zdania rozkazującego; mamy do tego specjalny zasób słów, takich jak 'powinno się', 'należy', 'obowiązuje', 'jest nakazane' itp. Ich koniecznym uzupełnieniem w każdym systemie normatywnym są słowa wyrażające przyzwolenie, jak 'wolno' czy 'jest dozwolone' oraz słowa do określania uprawnień. Normy, podobnie jak rozkazy, nie są ani prawdziwe ani fałszywe, co nie znaczy jednak, że nie przysługuje im pewien swoisty sposób uzasadniania ich słuszności.

Nie tylko normy są wysławiane za pomocą zdań rozkazujących albo ich odpowiedników w rodzaju 'powinno się' czy 'należy'. Ta sama forma służy do wysłowienia tego, co określamy mianem reguł, ponieważ i normy i reguły zalecają jakieś sposoby postępowania; stąd, nie trudno jest pomylić jedne z drugimi. W ich treści jednak zachodzi istotna różnica. Za normą stoi jakaś władza czy autorytet; nie musi ona liczyć się z wolą tego, który tej normie ma być poddany. **Reguła** natomiast odwołuje się do woli działającego, określając zależność między celem, przez niego samego postawionym, a środkami do jego osiągnięcia. Typowym przykładem reguł są przepisy kulinarne. Nie mówią one, że ktokolwiek ma obowiązek przyrządzać barszczyk z uszkami, ale jeśli tak sobie postanowi, to musi się zachować w określony sposób (tu już reguła nie zostawia dowolności), mianowicie zaopatrzyć się w buraki, mąkę etc., zetrzeć buraki, rozrobić ciasto itd.

Krótko mówiąc, normy wyrażają powinności, a reguły dotyczą umiejętności. Gdy idzie o reguły logiczne, o których będzie dalej mowa, dotyczą one umiejętności wnioskowania.

Umiejętność jest ściśle związana z wiedzą o świecie, nawet gdy ta wiedza nie jest wyrażona w słowach, a stanowi jedynie jakiś zapis, powiedzmy, w komórkach neuronowych. Choć więc reguły, podobnie jak rozkazy i normy, nie są same w sobie prawdziwe ani fałszywe, to jednak ich **trafność** — to znaczy to, na ile dają one skuteczność działaniom — zależy od prawdziwości zakładanej przez nie wiedzy. Tak jest z przepisami kulinarnymi, tak z regułami treningu sportowego (wspartymi na doświadczeniu i na wiedzy biologicznej), tak z regułami dyplomacji itd. I nie inaczej z regułami wnioskowania. O wiedzy, której reguła zawdzięcza swą trafność, powiemy, że uzasadnia ona tę regułę.

3.2. Wnioskowanie jako transformacja zdaniowa zachowująca prawdę. Zdanie opisowe, które uzasadnia regułę wnioskowania nazywa się **prawem logiki** lub, **twierdzeniem logiki**. Mówimy więc o takim prawie, że jest prawdziwe, nie mówimy zaś tego o regule, którą ono uzasadnia czyli, mówiąc swobodniej, wspiera. Prawdziwość praw logiki jest szczególnego rodzaju. Ta osobliwość polega, by tak rzec, na ich absolutnej uniwersalności: absolutnej w tym sensie, że obejmuje ona nie tylko cały realny świat, lecz także wszystkie możliwe światy; możliwe, to znaczy niesprzeczne.

Zilustrujmy to aksjomatem A1 systemu HA (por. wyżej odc. 1.1). Jak rozumieć powiedzenie, że jest on prawdą w każdym możliwym świecie? Prawo to twierdzi, że $\varphi(y) \Rightarrow \exists x\varphi(x)$; to znaczy, że gdy jakiś obiekt jest taki a taki, to istnieje obiekt taki a taki. Niech nazwą obiektu będzie imię biblijnego Mojżesza. Żeby uznać A1 za prawdę, nie trzeba się zastanawiać, czy Mojżesz należał do świata realnego, jak sądzą osoby literalnie wierzące w Biblię, czy do jakiegoś świata mitologicznego. W każdym z nich jest prawdą, że jeśli Mojżesz ogłosił Dekalog, to (istnieje) ktoś (kto) ogłosił Dekalog. Albowiem jest to prawda warunkowa, która mówi, że z pierwszego wynika drugie, czyli drugie jest prawdą *pod warunkiem*, że pierwsze jest prawdą; nie mówi się zaś tutaj wcale, że jest prawdą pierwsze czy drugie samo w sobie. Dzięki temu A1 jest prawdą w każdym możliwym świecie.

Reguła wnioskowania, która znajduje uzasadnienie w A1 jest następująca:

$$\frac{\varphi(y)}{\exists x\varphi(x)}$$

(spotkamy się z nią potem pod nazwą reguły dołączania kwantyfikatora egzystencjalnego).[7]

Pozioma kreska jest umownym symbolem wskazującym na to, że wyrażenia nad kreską są przesłankami (może być więcej niż jedna), zaś wyrażenia pod kreską są wnioskami. **Przesłanka** jest to zdanie, które w danym wnioskowaniu uznajemy za prawdziwe, a **wniosek** jest to zdanie, które uznajemy za prawdziwe dlatego, że wynika logicznie z przesłanki. Powiedzenie zaś, że **wynika logicznie** znaczy tyle, że zdanie równe co do kształtu przesłance stanowi poprzednik, a zdanie równokształtne z wnioskien stanowi następnik w jakimś prawie logiki.

To przejście od twierdzenia, czyli prawa, do opartej na nim reguły ma analogie poza logiką, także gdy idzie o reguły kierujące naszymi działaniami na codzień, o ile wpiszemy w nie odpowiednie odniesienie do celu działania. Jest np. prawo fizyki, że jeśli pociera się dostatecznie długo i mocno dwa drewka, to powstaje ogień. To prawo jest uzasadnieniem dla przepisu na rozpalanie ognia: chcesz (tj. masz na celu) uzyskać ogień, to pocieraj drewka. Przykład ten ilustruje, jak reguła wiąże cel ze środkiem na podstawie jakiejś wiedzy o świecie.

Mamy reguły dotyczące takiego przekształcania obiektów, żeby przy wprowadzanych doń zmianach obiekt zachował pewną zamierzoną własność. Tak jest z rzutowaniem jakiejś płaszczyzny na oś współrzędnych, z kopiowaniem tekstu czy rysunku (mogą ubyć barwy, ale zostają kształty), z przekładem z języka na język (zmiana brzmienia przy zachowaniu sensu), i tak dalej. Do tej klasy należą reguły wnioskowania współczesnej logiki. Określają one dopuszczalne zmiany struktury wyrażeń będących przesłankami — tak, by przy tych przekształceniach strukturalnych zachowała się prawdziwość przesłanek.[8] Tak więc, reguła wnioskowania powiada: gdy mamy zdanie lub zdania o strukturze (czyli formie) S_0, to ich przekształcenie (czyli transformacja) na zdanie o strukturze S_1 zapewnia temu drugiemu prawdziwość, o ile zdania podpadające pod S_0 są prawdziwe. Taka struktura (np. $\phi\&\psi$) reprezentuje nieskończenie wiele podstawień (np. wszystkie koniunkcje wyrażalne w danym języku); a że reguła wnioskowania (np. ta, która pozwala z powyższej formuły wywnioskować ϕ) dotyczy wszystkich możliwych podstawień, każdemu z nich gwarantując zachowanie prawdy przy danej transformacji, słusznie nosi ona miano niezawodnej (por. Borkowski [1972]).

Czemu służy taka działalność transformacyjna? Uzyskiwaniu nowych informacji, czyli powiększaniu naszej wiedzy. Choć ten przyrost wiedzy nie jest zauważalny przy każdym z osobna przekształceniu, to na końcu ich dłuższego łańcucha wyłania się zdanie, którego nie dałoby się uzyskać na innej drodze. Tak matematyk dochodzi do nowych, nieraz rewelacyjnych twierdzeń, tak detektyw znajduje zaskakujące rozwiązanie zagadki kryminalnej.

4. System założeniowy SB

4.1. O systemach założeniowych. Tę część rozdziału trzeba zacząć od pewnych uzupełnień rysu historycznego danego na wstępie. Była tam mowa o pierwszej fazie rozwoju współczesnej logiki, fazie ściśle powiązanej z budowaniem podstaw matematyki. Konstruowane wtedy systemy logiczne miały dostarczać aksjomatów matematyce, a więc same musiały być zaksjomatyzowane. Zauważono jednak (pod koniec lat 30tych), że ludzie stosujący logikę w swych rozumowaniach, w

---

[7] Niektórzy autorzy nie nazywają takiego zapisu regułą wnioskowania, lecz schematem wnioskowania; w tym ujęciu regułą jest wypowiedź, która stwierdza o danym schemacie, że jest on poprawny czyli niezawodny (por. Borkowski [1972]). Takie postępowanie terminologiczne ma dobre racje, lecz ma swe zalety także krótkość, którą uzyskamy dzięki umowie, że owo orzeczenie „jest schematem niezawodnym" jest wyrażane przez poziomąkreskę (imitującą kreskę ułamkową); wtedy, oczywiście, nie wolno pisać tej kreski w przypadku schematów nie będących niezawodnymi.

[8] Ponieważ odwołują się one do kształtu, a nie do sensu, mogą być z powodzeniem stosowane przez komputer. Tak rozwój logiki doprowadził do możliwości współdziałania człowieka z komputerem również we wnioskowaniach.

tym matematycy, korzystają jedynie z tych narzędzi, którymi są reguły wnioskowania, ignorując w praktyce aksjomaty logiczne oraz wywiedzione z nich prawa.

Przypomnijmy, każdy system aksjomatyczny ma ileś aksjomatów i niezbędne do dowodzenia minimum reguł, np. dwa asjomaty i trzy reguły w logice predykatów HA. Praktyka jednak nie ogranicza się do takiego minimum reguł, stosując reguły tam, gdzie teoria logiczna oferowała aksjomaty. Na przykład, jak to było omówione wyżej (odc. 3.2), zamiast aksjomatu A1 z systemu HA stosuje się regułę dołączania kwantyfikatora egzystenjalnego, omawianą niżej pod nazwą $[+\exists]$. Takie postępowanie jest niepomiernie prostsze technicznie i niejako naturalne, stąd zaczęto je nazywać **dedukcją naturalną**. Inna nazwa, mianowicie **metoda systemów założeniowych** zawiera w swej treści odniesienie do metody dowodowej, które zostanie wyjaśnione dalej.

Gdy uświadomiono sobie ów stan rzeczy, stało się to dla logików wyzwaniem, by skonstruować precyzyjny system logiczny, który by tę naturalną praktykę ujął teoretycznie, a tym samym umożliwił jej systematyczne badanie i lepsze zrozumienie. Wyzwanie to podjęli niezależnie od siebie i w tym samym czasie dwaj logicy: Stanisław Jaśkowski, ze szkoły Jana Łukasiewicza, w Polsce oraz Gerhard Gentzen, ze szkoły Davida Hilberta, w Niemczech. Ich badania zostały uwieńczone pracami wydanymi w tym samym roku (Jaśkowski [1934], Gentzen [1934]). Prace Jaśkowskiego kontynuowali w Polsce Słupecki i Borkowski [1962, 1969], a wyniki Gentzena dały początek wielkiemu nurtowi, który przyniósł, rzec można, nowe spojrzenie na metody wnioskowania.

Tym dwóm kierunkom dedukcji naturalnej odpowiadają dwie partie tego rozdziału, obecna systemowi Słupeckiego i Borkowskiego, a następna i ostatnia pewnemu systemowi pochodnemu od Gentzena, związanemu z nazwiskiem współczesnego logika R. M. Smullyana. Stąd oznaczenie pierwszego z nich literami SB a drugiego literami GS. System Smullyana jest pewną odmianą (wygodniejszą w stosowaniu) wcześniej systemu stworoznego wcześniej przez E. W. Betha [1955] pod nazwą tabel semantycznych.

Obu typom systemów, przy wszystkich, daleko idących różnicach, wspólna jest konstrukcja reguły wnioskowania jako pary złożonej ze zbioru przesłanek i zbioru wniosków (w systemach typu Jaśkowskiego zbiór wniosków jest jednoelementowy). Przesłanki oddziela się od wniosków poziomą kreską na kształt ułamkowej. Ta kreska jest symbolicznym zapisem faktu, że gdy wyrażenia występujące nad nią są prawdziwe, to wyrażenia pod nią muszą być prawdziwe; odpowiada więc on zgrubsza temu, co po polsku wyraża się słowami ‘więc’, ‘zatem’ itp., po łacinie słowem ‘ergo’, po angielsku ‘hence’, itd.

Reguły dzielą się na takie, w których transformacja polega na dołączeniu stałej logicznej i takie, w których transformacja polega na opuszczeniu stałej; w logice zdań tymi stałymi są funktory prawdziwościowe, a w logice predykatów kwantyfikatory. Następujące oznaczenia pozwolą powoływać się zwięźle na poszczególne reguły. Reguły dołączania oznaczone są znakiem ‘$+$’, a reguły opuszczania znakiem ‘$-$’. Po jednym lub drugim z tych znaków napisana jest stała, której dotyczy cała reguła; taka para symboli, ujęta w nawias, stanowi nazwę następującej po niej reguły. Wyjątek od tej metody oznaczania stanowi reguła odrywania; można by ją potraktować jednolicie oznaczywszy symbolem opuszczania implikacji, tj. ‘$[- \Rightarrow]$’, ale termin ‘reguła odrywania’ jest w logice zdań tak zakorzeniony, a sama reguła pojawia się w tak wielu systemach, że słuszne będzie respektowanie tej tradycyjnej nazwy, którą skrócimy w oznaczeniach do trzech liter ‘Odr’.

4.2. Reguły wnioskowania w SB. Zostanie najpierw podana lista reguł rachunku zdań, zawierająca w każdej pozycji nazwę reguły i jej treść, a po skomentowaniu tych reguł następna lista, odnosząca się do logiki predykatów. Oto wykaz dla rachunku zdań

$$[Odr] \quad \frac{\phi \Rightarrow \psi,\ \phi}{\psi}$$

$$[+\&] \quad \frac{\phi,\ \psi}{\phi \& \psi}$$

$$[-\&] \quad \frac{\phi\&\psi}{\phi} \qquad \frac{\phi\&\psi}{\psi}$$

$$[+\vee] \quad \frac{\phi}{\phi \vee \psi} \qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi}$$

$$[-\vee] \quad \frac{\phi \vee \psi,\ \neg\phi}{\psi} \qquad \frac{\phi \vee \psi,\ \neg\psi}{\phi}$$

$$[+\Leftrightarrow] \quad \frac{\phi \Rightarrow \psi,\ \psi \Rightarrow \phi}{\phi \Leftrightarrow \psi}$$

$$[-\Leftrightarrow] \quad \frac{\phi \Leftrightarrow \psi}{\phi \Rightarrow \psi} \qquad \frac{\phi \Leftrightarrow \psi}{\psi \Rightarrow \phi}$$

Każda z powyższych reguł „ma pokrycie" w odpowiednim prawie rachunku zdań. By się o tym przekonać, wystarczy przeformułować regułę na implikację w ten sposób, że przesłanka reguły staje się poprzednikiem implikacji, a wniosek następnikiem; tak otrzymaną formułę sprawdzamy metodą zerojedynkową, co prowadzi do stwierdzenia, że jest ona prawem logiki.

Reguły dołączania i opuszczania kwantyfikatorów są bardziej skomplikowane niż reguły dotyczące funktorów prawdziwościowych, gdyż trzeba podać dokładnie warunki podstawiania zmiennych indywiduowych za zmienne występujące w tej formule, która zawiera opuszczany kwantyfikator. Bez tych środków ostrożności może się zdarzyć, że ze zdania prawdziwego otrzymamy fałszywe. Na przykład, wyrażenie

$\exists_y(y$ jest dziadkiem $x)$

jest prawdą w odniesieniu do zbioru ludzi, bo w tym zbiorze istnieje przynajmniej jeden element taki, że gdy jego imię podstawimy za zmienną 'x', to powstanie zdanie prawdziwe. Jeśli opuszczając kwantyfikator w tej formule zastąpiłoby się 'y' przez 'x', powstałoby zdanie 'x jest dziadkiem x', które jest fałszywe, skoro nie ma osoby będącej swoim dziadkiem.

Będziemy mieli do dyspozycji następujące reguły dotyczące kwantyfikatorów.

$$[-\forall] \quad \frac{\forall_x\phi(x)}{\phi(a)}$$

$$[+\forall] \quad \frac{\phi(x)}{\forall_x\phi(x)}$$

Drugą z tych reguł stosujemy bezpiecznie do formuł zdaniowych będących tezami jakiegoś systemu. Na przykład, pierwszy aksjomat teorii identyczności, mający postać '$x = x$', przechodzi w zdanie '$\forall_x(x = x)$'. W przypadku innego rodzaju formuł, reguła przybiera postać bardziej złożoną (zob. Borkowski [1970] i [1972]).

$$[+\exists] \quad \frac{\phi(a)}{\exists_x\phi(x)}$$

$$[-\exists] \quad \frac{\exists_x\phi(x)}{\phi(a)}$$

Przy stosowaniu tej ostatniej reguły musimy przestrzegać następującego warunku: za każdym razem, gdy w toku dowodzenia opuszczamy kwantyfikator egzystencjalny, to wprowadzamy nową stałą indywiduową, która powinna się różnić od wszystkich tego rodzaju stałych uprzednio wprowadzonych do dowodu za pomocą tej reguły.

Niechaj wyjaśni to zastrzeżenie następujący przykład. Przypuśćmy, że w jakiejś teorii lub w narracji, odnoszącej się do określonego zbioru ludzi, stwierdza się istnienie osób będących finansistami (np. dyrektorami banków), w skrócie F, oraz osób będących socjalistami (np. w sensie opowiadania się za totalną kontrolą gospodarki przez państwo w imię racji społecznych), w skrócie S. W celu wykazania jakiejś tezy, wprowadzamy postacie reprezentujące obie klasy, którym nadajemy umowne imiona (pełni taką rolę np. słowo 'Kowalski' jako nazwisko dowolnego Polaka). Jeśli w roli takiego imienia posłużymy się za każdym razem tym samym symbolem, powiedzmy 'a', to z twierdzenia '$\exists_x Fx$' otrzymamy 'Fa' i z twierdzenia '$\exists_x Sx$' otrzymamy 'Sa'. Z tych dwóch wniosków wynika dalej, że istnieje ktoś będący zarazem finansistą i socjalistą (zob. niżej, przykład `P.1` w odc. 4.3). Takie twierdzenie wymagałoby uzasadnienia przez powołanie się na odpowiednie fakty, nie może ono pojawić się wyłącznie w wyniku manipulacji literami. Stąd zakaz wprowadzania więcej niż raz tej samej stałej indywiduowej przy opuszczaniu kwantyfikatora egzystencjalnego.

4.3. Przykłady dowodzenia wprost. Oto przykład dowodu, będący zarazem kontynuacją komentarza z końca poprzedniego odcinka.

`P.1` $Pa\&Qa \Rightarrow \exists_x(Px\&Qx)$

Założenia dowodu

1 Pa

2 Qa

Wnioski z założeń

3	$Pa\&Qa$	[+&]: 1, 2
	$\exists_x(Px\&Qx)$	[+∃]: 3

Ten prosty przykład dobrze się nadaje do zilustrowania metody dowodzenia założeniowego (wspomnianej wstępnie w odc. 4.1 tego rozdziału).

Zdanie dowodzone ma postać implikacji. Jest zatem wtedy prawdziwe, gdy nie jest tak, że ma prawdziwy poprzednik i fałszywy następnik. Kiedy potraktujemy następnik jako układ przesłanek i uda się wywnioskować zeń następnik za pomocą odpowiednich reguł, świadczy to, że nie może on być fałszywy przy prawdziwym następniku; nie może, ponieważ reguły wnioskowania są tak dobrane, by gwarantowały prawdziwość wniosku (tu pokrywającego się z następnikiem) przy prawdziwości przesłanek (pokrywających się z poprzednikiem).

Przesłanki nazywają się w takim dowodzie **założeniami**, ponieważ w treści słowa 'przesłanka' zawiera się uznanie za prawdę w sposób kategoryczny, podczas gdy treść słowa 'założenie' dopuszcza uznawanie w sposób hipotetyczny. Dowód nazywa się **założeniowym**, gdy uznawanie zdań pokrywających się z poprzednikiem jest w nim hipotetyczne, czyli warunkowe, co znaczy, że badamy, co by wolno na podstawie tych zdań uznać za prawdę, przy założeniu, że są one prawdziwe. Czy są naprawdę, nie musimy tego dla celów dowodu rozstrzygać, bo interesuje nas tylko ów związek: że o ile są prawdziwe, to takie to a takie inne zdanie jest również prawdziwe. Dzięki stwierdzeniu tego związku mamy podstawę do uznania prawdziwości odpowiedniej implikacji (nie przesądzając, czy prawdziwy jest jej następnik potraktowany w dowodzie jako przesłanka).

Po wypisaniu założeń przystępujemy do wyprowadzania z nich konsekwencji za pomocą reguł wnioskowania. Reguła użyta w celu uzyskania wniosku zapisanego w danym wierszu jest wymieniona na końcu wiersza wraz ze wskazaniem wcześniejszych formuł, do których ją zastosowano, by otrzymać dany wniosek. By móc powoływać się na wcześniejsze formuły bez ich cytowania, numeruje się wiersze dowodu, a odniesienia do formuł czyni się za pomocą tych numerów. Ostatni wiersz nie jest numerowany, bo nie ma potrzeby powoływania się nań, co zarazem wskazuje, iż występującą w nim formułę traktujemy jako wniosek całego dowodu.

Opisane postępowanie nazywa się **dowodzeniem wprost** w odróżnieniu od dowodzenia nie wprost, które omówimy przy sposobności odpowiedniego przykładu, a porównanie obu sposobów wyjaśni sens nadanych im nazw.

W powyższym dowodzie, jak i w następnych, ilustrujących metody dowodzenia posługujemy się, dla uproszczenia wizualnego, predykatami jednoargumentowymi reprezentowanymi przez litery 'P', 'Q' etc., a nie fomułami o nieokreślonej strukturze, reprezentowanymi przez litery greckie. Znaczy to, że zamiast dowodzić danego prawa w całej ogólności, dowodzimy tylko jednego z jego konkretnych przypadków, czyli podstawień, mianowicie takiego, w którym występują konkretne predykaty jednoargumentowe. Dzięki zdolności naszego umysłu do widzenia tego, co ogólne w tym, co konkretne, na co możemy liczyć w tym przypadku, nie tracimy na tej konkretyzacji poznawczo, a zyskujemy większą czytelność zapisu.

Kolejnym przykładem niech będzie prawo rozdzielania kwantyfikatora ogólnego między człony implikacji, z zamianą na kwantyfikator egzystencjalny. Założenia są zaznaczone skrótem 'zał.'

P.2 $\forall_x(Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow (\exists_x Px \Rightarrow \exists_x Qx)$

1	$\forall_x(Px \Rightarrow Qx)$	zał.
2	$\exists_x Px$	zał.
3	Pa	$[-\exists]$: 2
4	$Pa \Rightarrow Qa$	$[-\forall]$: 1
5	Qa	$[Odr]$: 4, 3
	$\exists_x Qx$	$[+\exists]$: 5

W ten sposób z tego, że *każdy filozof jest omylny* wynika logicznie, że *jeśli istnieją filozofowie, to istnieją istoty omylne*. Zauważmy, że zdanie 'każdy filozof jest omylny' jest zwięzłą parafrazą (tj. mówi to samo innymi słowami) zdania 'o każdym człowieku jest prawdą, że jeśli jest on filozofem to jest omylny'. W tej drugiej wersji symbolowi 'x' pod kwantyfikatorem odpowiada słowo 'człowiek', przy założeniu, że nasze zmienne indywiduowe odnoszą się do elementów zbioru ludzi, zaś wystąpieniom zmiennej 'x' w zasięgu kwantyfikatora odpowiadają wystąpienia zaimka 'on'.

Zasługuje w tym dowodzie na zauważenie kolejność formuł przy opuszczaniu kwantyfikatora. Najpierw stosujemy opuszczenie do formuły zawierającej kwantyfikator ogólny, a potem do formuły zawierającej kwantyfikator egzystencjalny, choć jako założenia występowały one w kolejności odwrotnej (której nie warto by zmieniać bez powodu). Powodem jest to, że obowiązuje nas warunek towarzyszący regule $[-\exists]$, mianowicie by nie zastępować zmiennej stałą, która choć raz była już użyta w danym dowodzie. Natomiast reguła opuszczania kwantyfikatora ogólnego nie jest związana takim zastrzeżeniem, bo skoro wszystkie przedmioty (z rozważanej dziedziny) spełniają daną formułę (tzn. dla wszystkich jest ona prawdziwa), to możemy wykorzystać także ten obiekt, którego nazwę podstawiliśmy za zmienną przy opuszczaniu wcześniej kwantyfikatora egzystencjalnego.

Rozważmy obecnie prawo rozdzielania kwantyfikatora ogólnego między człony implikacji, tym się różniące od poprzedniego, że przy rozdzielaniu zachowujemy kwantyfikator ogólny. Tym razem, z poglądu, że każdy filozof jest omylny możemy dedukować, że *jeśli wszyscy są filozofami, to wszyscy są omylni*. Warto zauważyć, że ta konsekwencja zostanie lepiej sformułowana w języku naturalnym, jeśli użyjemy trybu warunkowego nierzeczywistego, wyrażanego przez 'gdyby', jest on bowiem na miejscu wtedy, gdy jest wiadome, iż poprzednik jest fałszywy (na pewno nie wszyscy są filozofami). Należy więc raczej wyrazić wniosek zdaniem: 'gdyby wszyscy byli filozofami, to wszyscy byliby omylni'. Oto dowód.

P.3 $\forall_x(Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow (\forall_x Px \Rightarrow \forall_x Qx)$

1 $\forall_x(Px \Rightarrow Qx)$ zał.

2 $\forall_x Px$ zał.

3 $Px \Rightarrow Qx$ $[-\forall]$: 1

4 Px $[-\forall]$: 2

5 Qx $[Odr]$: 3, 4

$\forall_c Qx$ $[+\forall]$: 5

W odróżnieniu od poprzedniego dowodu, po opuszczeniu kwantyfikatora pozostają w formule te same symbole zmienne, podczas gdy w poprzednim były podstawiane w ich miejsce stałe indywiduowe. Bierze się to stąd, że dowód ma się zakończyć dołączeniem kwantyfikatora ogólnego, a ten może być dołączony tylko do formuły ze zmiennymi (które po dołączeniu będzie wiązał).

Takie pozostawienie zmiennych jest prawidłowe pod warunkiem, że zmienna podlegająca związaniu we wniosku nie była wolna w założeniach dowodu. W naszym dowodzie warunek ten jest spełniony. A uzasadnia się on tym, że obecność zmiennych wolnych w założeniach dowodu może dopuszczać podstawienia, przy których założenie stanie się prawdą dla pewnych przedmiotów, nie będąc jednak prawdziwe dla wszystkich przedmiotów z rozważanej dziedziny (co jest warunkiem poprawnego uogólnienia). Intuicyjną trafność owego warunku można zobaczyć próbując dowieść np. wyrażenia '$\forall_x(Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow (Py \Rightarrow Qy)$', gdzie w następniku występuje dwa razy zmienna wolna. Założeniem w tej próbie dowodu byłby poprzednik całej implikacji oraz poprzednik tej implikacji, która stanowi następnik; to drugie naruszałoby warunek nie posiadania zmiennych wolnych. Niech 'P' znaczy 'jest szewcem', a 'Q' znaczy 'jest żołnierzem'. Przy tej interpretacji następnik jest spełniany tylko przez niektóre elementy zbioru ludzi, np. przez słynnego szewca Kilińskiego, powstańca w insurekcji Kościuszkowskiej. Dlatego wychodzące z tych założeń wnioskowanie nie powinno doprowadzić do zdania mówiącego o całej dziedzinie, mianowicie, że wszyscy są żołnierzami. Natomiast gdy taka ogólność jest zawarta już w założeniach (przez fakt związania zmiennych kwantyfikatorem ogólnym), ma ona prawo udzielić się wnioskowi.

Przykład ten na równi z poprzednim ilustruje jeszcze jeden rys metody założeniowej. W przypadku, gdy dowodzi się implikacji, której następnik jest także implikacją, to dowód ma dwa założenia: jednym jest implikacja będąca poprzednikiem, a drugim poprzednik implikacji będącej następnikiem. Zilustrujmy to jescze jednym przykładem, tak dobranym, by uwydatnić omawiany rys. Będzie to twierdzenie rachunku zdań zwane *prawem sylogizmu*.

P.4 $(p \Rightarrow q)\&(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

1 $(p \Rightarrow q)\&(q \Rightarrow r)$ zał.

2 p zał.

3 $(p \Rightarrow q)$ $[-\&]$: 1

4 $(q \Rightarrow r)$ $[-\&]$: 1

5 q $[Odr]$: 3, 2

r $[Odr]$: 4, 5

Gdy predykat jest dwuargumentowy, formuła może być poprzedzona dwoma kwantyfikatorami i wtedy pojawia się pytanie, czy z tej formuły wynika inna, w której kwantyfikatory byłyby przestawione. Jako przykład praw z tej grupy niech posłuży następujące.

P.5 $\exists_x\forall_y Rxy \Rightarrow \forall_y\exists_x Rxy$

1 $\exists_x\forall_y Rxy$ zał.

2 $\forall_y Ray$ [$-\exists$]: 1

3 Ray [$-\forall$]: 2

4 $\exists_x Rxy$ [$+\exists$]: 3

$\forall_y \exists_x Rxy$ [$+\forall$]: 4

Te kilka przykładów, choć dalekie jest od wyczerpania najczęściej stosowanych praw logiki oraz rodzajów dowodzenia, daje pojęcie o istocie metody dowodów założeniowych z kategorii dowodów wprost.[9] Zajmiemy się obecnie inną kategorią, interesującą nie tylko jako metoda rozumowania, lecz także jako szczególnie skuteczna metoda dyskusji.

4.4. Przykłady dowodzenia nie wprost. **Dowód nie wprost** któremu z kolei poświęcimy uwagę, nosi też nazwę **sprowadzenia do niedorzeczności** lub *sprowadzenia do absurdu*, po łacinie *reductio ad absurdum*. Ta niedorzeczność czyli absurd, to jest, dokładniej mówiąc, **sprzeczność** na tym polegająca, że z założeń dowodu wywnioskowuje się parę zdań między sobą sprzecznych, a taka para, gdy jej człony połączymy koniunkcją, jest zdaniem fałszywym. Zdanie fałszywe nie może wynikać ze zdań prawdziwych, a więc jego wyprowadzenie świadczy o tym, iż przynajmniej jedno z założeń jest fałszywe.

Tą metodą możemy atakować w dyskusji partnera pokazując, że jego stanowisko prowadzi do wewnętrznej sprzeczności. A jeśli nasz własny pogląd stanowi zaprzeczenie poglądu partnera, to obaliwszy jego pogląd, uzasadniamy tym samym własny. Z dwóch bowiem zdań, z których jedno stanowi zaprzeczenie drugiego (czyli między sobą wzajem sprzecznych) dokładnie jedno jest prawdziwe i dokładnie jedno fałszywe. Jeśli zatem przeczące naszemu zdanie partnera okazuje się fałszywe w wyniku sprowadzenia do niedorzeczności, to nasz pogląd okazuje się tym samym prawdziwy. Mistrzem tej metody był Sokrates (469–399 przed Chr.), jakim go znamy z dialogów jego ucznia Platona (ok. 427–347).

Ta okrężna (nie wprost) metoda dochodzenia do prawdy przez odrzucenie jej zaprzeczenia znajduje szerokie zastosowanie w matematyce i w logice. Między innymi służy ona udowodnieniu pewnej pary praw logiki predykatów, która ukazuje ważną zależność między kwantyfikatorem ogólnym, egzystencjalnym i negacją. Nazywają się one **prawami de Morgana** od nazwiska logika angielskiego Augusta de Morgana (1806–1871).[10] Jedno z nich bywa też nazywane prawem negowania kwantyfikatora ogólnego, w skrócie NKO, drugie zaś prawem negowania kwantyfikatora egzystencjalnego, w skrócie NKE. Oto ich sformułowania.

NKO $\neg\forall_x Px \Leftrightarrow \exists_x \neg Px$

NKE $\neg\exists_x Px \Leftrightarrow \forall_x \neg Px$

Aby udowodnić równoważność, postępujemy zwykle w ten sposób, że rozdzielamy ją na dwie implikacje (por. wyżej [$- \Leftrightarrow$]) i dowodzimy każdej z nich osobno, a potem je składamy otrzymując znowu równoważność (por. [$+ \Leftrightarrow$]). Dla każdego z praw de Morgana udowodnimy po jednym z takich składników implikacyjnych jako ilustrację metody dowodzenia nie wprost.[11]

P.6 $\exists_x \neg Px \Rightarrow \neg\forall_x Px$

1 $\exists_x \neg Px$ zał.

[9] Więcej przykładów można znaleźć u Borkowskiego [1972], a jeszcze więcej, wraz z precyzyjnym wyjaśnieniem reguł wnioskowania u Słupeckiego i Borkowskiego [1984] oraz Borkowskiego [1970].

[10] Najważniejsze prawa logiki są wyróżnione nazwami odnoszącymi się do ich struktury, a niekiedy nazwą pochodzącą od imienia autora, któremu się przypisuje odkrycie lub pierwsze sformułowanie danego prawa.

[11] Drugi składnik wymaga w obu wypadkach wprowadzenia tzw. założeń dodatkowych, które należą do nieco bardziej zaawansowanej techniki dowodów założeniowych; (zob. Borkowski [1970, s. 52]).

2	$\forall_x Px$	zał. dow. nie wprost
3	$\neg Pa$	$[-\exists]$: 1
4	$P(a)$	$[-\forall]$: 2
	sprzeczność	3, 4

P.7 $\forall_x \neg Px \Rightarrow \neg\exists_x Px$

1	$\forall_x \neg Px$	zał.
2	$\exists_x Px$	zał. dow. nie wprost
3	Pa	$[-\exists]$: 2
4	$\neg P(a)$	$[-\forall]$: 1
	sprzeczność	3, 4

Założeniem, które podaje się w pierwszym wierszu jest, jak w poprzednich przykładach, poprzednik dowodzonej implikacji. Założeniem dowodu nie wprost, podawanym w drugim wierszu, jest negacja następnika. Te dwa założenia razem wzięte równoważne są zaprzeczeniu dowodzonej implikacji, ponieważ zaprzeczenie implikacji polega na przyjęciu jej poprzednika przy zanegowaniu następnika. Z tego zaprzeczenia tezy dowodzonej wynika pewna formuła (w obu przykładach jest to 'Pa') oraz jej negacja; a skoro z zaprzeczenia tezy dowodzonej wynika sprzeczność, to musi ono być fałszem, prawdą jest zatem zaprzeczenie tego zaprzeczenia, czyli teza dowodzona.

4.5. Uwagi do praw de Morgana. Prawa de Morgana zasługują na uwagę nie tylko jako sposobność do podania prostego przykładu dowodu nie wprost. Są one ważne z tego powodu, że z każdego z nich można otrzymać formułę nadającą się do tego, by użyć jej jako definicji jednego z kwantyfikatorów przez drugi (przy współwystępowaniu negacji); a to z kolei, ilustruje pewną doniosłą zasadę tyczącą się definiowania.

Z prawa NKO możemy otrzymać równoważność, która uczy, jak można się obejść bez kwantyfikatora ogólnego, nic nie tracąc na możliwości wysłowienia, a płacąc za to jedynie wydłużeniem się wypowiedzi. Gdy zanegujemy obie strony równoważności NKO, otrzymamy wyrażenie również prawdziwe, dzięki prawu, że $p \Leftrightarrow q$ implikuje $\neg p \Leftrightarrow \neg q$. Wtedy po lewej stronie, tj. przed kwantyfikatorem ogólnym wystąpi podwójna negacja, co pozwala opuścić oba symbole negacji, w myśl prawa, że $\neg\neg p$ równoważne jest p (przywołane tu prawa można sprawdzić metodą zerojedynkową). Tak dostajemy twierdzenie o możliwości Eliminacji Kwantyfikatora Ogólnego przez zastąpienie go kwantyfikatorem egzystencjalnym w pewnej konfiguracji z negacją.[12]

EKO $\quad \forall_x Px \Leftrightarrow \neg\exists_x \neg Px$

Ta równoważnośc pozwala na to, by w dowolnym kontekście zastąpić jej lewą stronę przez prawą, a więc obejść się bez symbolu kwantyfikatora ogólnego, którego sens zostaje oddany przez kwantyfikator egzystencjalny otoczony symbolami negacji. Z tej możliwości eliminacji korzystamy nieraz bezwiednie w języku polskim, w którym istnieją wyraźne odpowiedniki praw de Morgana. I tak zamiast powiedzieć '*każdy jest omylny*' możemy posłużyć się zdaniem '*nie ma nieomylnych*', w którym '*nie ma*' odpowiada zestawieniu symboli '$\neg\exists$', a negacja po kwantyfikatorze mieści się w słowie '*nie*omylny'.

[12] Jeśli zamiast formułą z predykatem jednoargumentowym 'Px' posłużymy się schematem '$\varphi(x)$' reprezentującym formuły o dowolnej złożoności, w tym formuły z predykatami wieloargumentowymi, to otrzymamy zapis tak ogólny, jak tego wymaga ogólność naszej teorii; praktycznie, możemy poprzestać na sformułowaniu takim jak tu podane.

Analogicznie jak EKO powstaje z prawa negowania kwantyfikatora ogólnego, tak z prawa negowania kwantyfikatora egzystencjalnego powstaje równoważność dająca możliwość Eliminacji Kwantyfikatora Egzystencjalnego, mianowicie

EKE $\exists_x Px \Leftrightarrow \neg\forall_x \neg Px$

Odpowiedniki takiej eliminacji mamy też w języku polskim. Zamiast powiedzieć '*istnieją geniusze*' możemy posłużyć się dłuższym lecz identycznym co do treści zdaniem '*nie jest prawdą, że wszyscy są pozbawieni geniuszu*' (zwrot 'są pozbawieni geniuszu' jest zgrabnym sposobem wyrażenia negacji, zamiast niezdarnego 'są nie-genialni').

4.6. Przy okazji praw de Morgana: ogólniejsze uwagi o stosunkach między pojęciami. Jeśli można się obejść bez jednego lub bez drugiego kwantyfikatora, to dlaczego używamy obu? A czynimy to zarówno w językach etnicznych jak i w logice predykatów. Czynimy tak, między innmi, ze względu na ekonomię wysiłku umysłowego. To czy wystąpi jeden symbol czy trzy ma znaczenie już nawet w krótkiej formule, a gdy tych wystąpień jest więcej odpowiednio wzrasta przejrzystość wypowiedzi uzyskana dzięki takim skrótom; oszczędzona w ten sposób energia umysłowa może zostać skierowana do innych zadań poznawczych. Stąd ogromna rola definicji jako środków skracania wypowiedzi i czynienia ich bardziej przejrzystymi. Potrzeba jednak znać niezbędne minimum, bez którego zasób słownikowy danej teorii nie sprostałby stawianym jej zadaniom. Dzięki prawom de Morgana dowiadujemy się, że w tym minimum nie muszą się mieścić oba naraz kwantyfikatory. Który z dwóch stanie się podstawowym, to sprawa wolnego wyboru. Z badań zaś nad rachunkiem zdań wiadomo, że wśród funktorów prawdziwościowych są takie pary, mianowicie koniunkcja z negacją, alternatywa z negacją i implikacja z negacją, że dana para wystarcza do zdefiniowania wszystkich pozostałych funktorów (są jeszcze dwa funktory, które wystarczają w pojedynkę, ponieważ zawierają w sobie negację, np. 'ani ... ani ...'). Powiedzmy, że wybieramy do tego celu koniunkcję z negacją, a ponadto kwantyfikator ogólny. Wtedy za pomocą tych trzech terminów możemy wyrazić wszystkie prawa logiki. Co więcej, jeśli dodamy do takiej trójcy symbol należenia do zbioru '$\in$' (będzie o nim wiele w następnym rozdziale) dołączając tym samym do systemu pojęcie zbioru, a za pomocą tego ostatniego zdefiniujemy pojęcie liczby (co, istotnie, uczyniono), to w tych czterech terminach można wyrazić całą matematykę. Łatwo sobie przedstawić, że tak zbudowany język byłby dla ludzi skrajnie skomplikowany i nieczytelny, dlatego właśnie sięgamy po definicje, które dają kolosalne zyski gdy idzie o zwięzłość i przejrzystość.

Nie jest to jednak jedyny powód, dla którego używamy dwóch a nie jednego kwantyfikatorów, ani jedyny powód, dla którego do zapisywania zdań warunkowych używamy strzałki, ($p \Rightarrow q$) a nie symbolów koniunkcji i negacji (w formule $\neg(p\&\neg q)$). Co innego teoria logiczna, w której staramy się ustalić niezbędne minimum terminologiczne dla zaprowadzenia definicyjnego porządku i dla pewnego wglądu w struktury pojęciowe, a co innego owa naturalna logika, którą zawdzięczamy zapewne dziedzictwu biologicznemu jak i kulturowemu; w tym drugim największą dla logiki rolę ma przyswojony w dzieciństwie system językowy. W owej logice naturalnej funkcjonują niezależnie od siebie kwantyfikator ogólny i egzystencjalny, koniunkcja i alternatywa, itd., a dowodem iż są niezależne może być choćby fakt, że wiadomość o owych zależnościach przyjmujemy jako coś nowego (zawdzięczając te rewelacje teorii logicznej).

Tak więc ewolucja biologiczna i kulturowa wyposażyła nas w taki a nie inny układ pojęć logicznych, dając z jednej strony pewien nadmiar, gdy mieć na uwadze wzajemną definiowalność (redukującą wszystkie terminy logiczne do trzech lub dwóch), a z drugiej strony pewien niedomiar, gdy mieć na uwadze, że spośród dwudziestu funktorów najchętniej korzystamy z jakichś pięciu (odczuwając je jako najbardziej „naturalne"), do czego dodajemy dwa kwantyfikatory. Znaczy to, że pomimo wzajemnej definiowalności na poziomie teorii, w naszym naturalnym systemie każde z tych pojęć zostało zdefiniowane, czyli wyposażone w znaczenie, niezależnie od pozostałych za sprawą jakiegoś zbioru kontekstów użycia. Małe dziecko osobno, tj. w innych kontekstach, uczy się sensu słowa ‘wszyscy’ (gdy słyszy np. „wszyscy cię lubią”), a w innych kontekstach słowa ‘istnieje’ („istnieje św. Mikołaj”). Zwykle trzeba dopiero kursu logiki, by zaktualizować (potencjalnie w każdym drzemiące) zrozumienie, iż terminy ‘wszyscy’ i ‘istnieje’ pozostają w stosunku określonym prawami de Morgana (to, że wszyscy są zdolni zrozumieć prawa de Morgana znaczy, że nie istnieją tacy, co nie są zdolni ich zrozumieć).

Tego rodzaju obserwacje świadczą o roli teorii logicznej dla lepszego zrozumienia, jak funkcjonuje nasz umysł i nasz język. Tego powinniśmy od niej oczekiwać i po to ją rozwijać, jak to czynią jedni, oraz studiować, jak czynią inni. A wraz ze zrozumieniem, jak funkcjonuje pewna sprawność podnosi się ta sprawność na wyższy poziom. Tak jest w w każdym treningu, gdzie warunkiem sukcesu jest połączenie wrodzonych zdolności z ćwiczeniem i z wiedzą o danym układzie (wiedzą biologiczną w treningu sportowym, wiedzą o maszynie przy obsłudze maszyny itd.). Tak więc, sukces w sztuce rozumowania zależy od zdolności do niego, ćwiczenia się w nim, i od wiedzy logicznej.

5. System założeniowy GS: tabele analityczne

5.1. Uwagi wstępne. Metoda dowodzenia, którą się obecnie zajmiemy należy do ostatnich etapów rozwoju jednego z dwóch pochodzących od Gentzena [1934] systemów dedukcji naturalnej. W tej przetworzonej postaci, podanej przez Smullyana [1968], nosi on nazwę tabel analitycznych, która się tłumaczy następującą jego własnością.

Reguły wnioskowania w tym systemie są to wyłącznie reguły opuszczania stałych logicznych. Opuszczanie prowadzi do coraz prostszych formuł będących składnikami formuły wyjściowej, a więc postępuje niejako za tokiem analizy syntaktycznej danej formuły; stąd określenie **tabele analityczne**. Analiza syntaktyczna dokonuje się wedle zasady znanej z teorii kategorii składniowych (por. rozdz. 2). Zaczyna się mianowicie od znalezienia głównego funktora. Do danej formuły stosuje się tę regułę opuszczania, która dotyczy głównego funktora, a jeśli cała formuła poprzedzona jest kwantyfikatorami, to odnosi się do pierwszego z tych kwantyfikatorów; w przypadku zdań przeczących, opuszczeniu podlega negacja oraz symbol będący główną stałą logiczną w zasięgu funktora negacji (por. niżej, reguły w prawej kolumnie).

Metoda tabel analitycznych, choć nie jest algorytmem w takim pełnym sensie, jak metoda zero-jedynkowa rachunku zdań, przybliża się jednak w pewien sposób do *algorytmu*. W wyższym więc stopniu niż inne systemy logiki predykatów system GS realizuje myśl, która przyświecała próbom Leibniza: stworzyć taki rachunek dla rozumowań (*calculus ratiocinator*), żeby w sposób automatyczny prowadził on do wyniku, na wzór nici Ariadny wyprowadzającej niezawodnie z Labiryntu; stąd używany przez Leibniza łaciński termin *filum cogitationis* (nić myślenia).

Ową nicią myślenia jest w metodzie tabel analitycznych rozkład syntaktyczny formuły wyjściowej na coraz prostsze składniki, aż do zdań atomowych, traktowanych jako składniki formuł typu: $\forall_x Bx$ i $\exists_x Bx$.[13] Dowód jest zakończony, gdy rozłożyło się formułę wyjściową, którą jest zaprzeczenie tezy dowodzonej, na wszystkie jej najprostsze składniki (*Teilformeln* — w terminologii Gentzena). W niektórych miejscach, np. gdy rozkładaną formułą jest alternatywa, dowód ulega rozgałęzieniu, co symbolizuje pionowa kreska między gałęziami dowodu. Jeśli na każdej gałęzi pojawi się para składników sprzecznych, np. $B(a)$ i $\neg B(a)$, to mówimy. że tabela jest **zamknięta**, w przeciwnym wypadku, gdy nie we wszystkich gałęziach pojawia się sprzeczność, mówi się o tabeli **otwartej**. Tak więc, dowody w systemie tabel analitycznych są zawsze dowodami nie wprost, co zwalnia nas od zastanawiania się, którą metodę wybrać dla danego twierdzenia.

---

[13] Duże litery z początku alfabetu są w tej części rozdziału używane do reprezentowania dowolnych formuł logiki predykatów, a więc w tej samej funkcji, która wcześniej była pełniona przez litery greckie, jak ϕ i in. Ta zmiana oznaczeń służy lepszemu odróżnieniu wizualnemu obu rodzajów reguł. Także nazwy reguł są skonstruowane inaczej: w nawiasie okrągłym wskazana jest stała lub dwie stałe podlegające opuszczeniu.

Gdy tabela jest zamknięta, znaczy to, że formuła wyjściowa $\neg A$, jako prowadząca do sprzeczności, nie jest spełnialna; zaś $\neg A$ nie jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy jej negacja, tj. A, jest tautologią. Tym sposobem dochodzimy do stwierdzenia tautologiczności formuły A poddanej owemu testowi zaprzeczenia i wysnuwania stąd wszystkich możliwych konsekwencji, rozumianych jako najprostsze składniki formuły. Jeśli natomiast któraś z gałęzi pozostaje otwarta, ujawnia ona przypadek, w którym formuła wyjściowa $\neg A$ jest spełniona, co świadczy, że A nie jest tautologią. Tak więc, metoda ta pozwala znajdować nie tylko rozstrzygnięcia pozytywne (co jest wynikiem pomyślnie zakończonego dowodu), lecz także rozstrzygnięcia negatywne, co stanowi o jej wyższości nad innymi technikami dowodowymi rachunku predykatów.

5.2. Reguły wnioskowania systemu GS. Oto lista reguł wnioskowania systemu tabel analitycznych czyli GS.[14]

$[\neg\,\neg]$	$\frac{\neg\,\neg\,A}{A}$		
$[\wedge]$	$\frac{A\wedge B}{A,\,B}$	$[\neg\,\wedge]$	$\frac{\neg(A\wedge B)}{\neg A\vert\neg B}$
$[\vee]$	$\frac{A\vee B}{A\vert B}$	$[\neg\vee]$	$\frac{\neg(A\vee B)}{\neg A,\,\neg B}$
$[\Rightarrow]$	$\frac{A\Rightarrow B}{\neg A\vert B}$	$[\neg\ \Rightarrow]$	$\frac{\neg(A\Rightarrow B)}{A,\,\neg B}$
$[\exists]$	$\frac{\exists_x A(x)}{A(c)}$	$[\neg\exists]$	$\frac{\neg\exists_x A(x)}{\neg A(c)}$
$[\forall]$	$\frac{\forall_x A(x)}{A(c)}$	$[\neg\forall]$	$\frac{\neg\forall_x A(x)}{\neg A(c)}$

Do reguł $(\exists)$ i $(\neg\forall)$ dołączone jest następujące zastrzeżenie: mogą one być stosowane tylko w ten sposób, że stała indywiduowa c (którą, po opuszczeniu kwantyfikatora, zastępujemy zmienną x wszędzie tam, gdzie występuje ona w A), nie pojawiła się we wcześniejszym wierszu dowodu w jakiejś formule różnej od A; jeśli zaś c pojawia się wcześniej, to należy użyć w charakterze stałej innej litery, nie występującej dotąd w dowodzie.[15]

Powód tego zastrzeżenia jest następujący. Przypuśćmy, że w danym dowodzie zostało już wykazane istnienie przedmiotu spełniającego A, tzn. stwierdzone $\exists_x A(x)$. Możemy wtedy wprowadzić indywiduum, które oznaczymy symbolem 'c', powiadając: „niech c będzie owym x spełniającym A". Gdyby okazało się, w dalszym toku dowodu, że istnieje przedmiot spełniający warunek B, to nie należy nazywać go znowu 'c', bo to by przesądzało, że ów przedmiot spełnia oba warunki, tj. A i B, co nie zostało udowodnione; używając zaś innej litery, np. 'a', niczego takiego nie przesądzamy. Analogiczne uzasadnienie odnosi się do zastrzeżenia przy regule $\neg\forall$, która również odnosi się do zdań egzystencjalnych (to, że nie każdy przedmiot spełnia A znaczy, że istnieją przedmioty nie spełniające A).

5.3. Przykłady dowodzenia. Oto przykład dowodu w formie tabeli analitycznej z użyciem predykatów jednoargumentowych 'P' i 'Q' (podobnie jak w przedstawianiu systemu SB; por. wyjaśnienie w odc. 4.3) Dowodzi się twierdzenia:

$$\forall_x(Px \Rightarrow Bx) \Rightarrow (\forall_x Px \Rightarrow \forall_x Bx),$$

a więc jego negację przyjmuje się jako założenie dowodu nie wprost, co – zgodnie z $(\neg\ \Rightarrow)$ – prowadzi do przyjęcia poprzednika implikacji oraz zaprzeczenia jej następnika; daje to dwa założenia naszego dowodu, oznaczone poniżej numerami 1 i 2.

---

[14] Przypomnijmy pochodzenie tego skrótu: G – od Gentzena jako twórcy całego nurtu, S – od Smullyana jako autora omawianego systemu.

[15] Gdy idzie o regułę $(\exists)$, i reguła i zastrzeżenie są identyczne jak w systemie Słupeckiego i Borkowskiego. Analogicznym warunkiem należy opatrzeć regułę $(\neg\forall)$; jak widać z praw de Morgana, dotyczy ona formuł egzystencjalnych, skoro $\neg\forall_x A$ to tyle, co $\exists_x\neg A$.

1	$\forall_x(Px \Rightarrow Qx)$;		
2	$\neg(\forall_x Px \Rightarrow \forall_x Qx)$;		
3		$\forall_x Px$	2;
4		$\neg\forall_x Qx$	2;
5		Pa	3;
6		$\neg Qa$	4;
7	$Pa \Rightarrow Qa$		1;
8	$\neg Pa \mid Qa$		7;

(podwójna kreska oznacza zamknięcie tabeli po wystąpieniu sprzeczności). A oto dowód formuły:

$$\exists_x\forall_y Rxy \Rightarrow \forall_y\exists_x Rxy,$$

gdzie, dla ustalenia uwagi, możemy interpretować Rxy jako predykat: x jest liczbą naturalną większą od y.[16]

1	$\exists_x\forall_y Rxy$;		
2	$\neg\forall_y\exists_x Rxy$;		
3		$\forall_y Ray$	1;
4		$\neg\exists_x Rxb$	2;
5	Rab		3;
6	$\neg Rab$		4.

Zbadajmy dowodliwość formuły będącej implikacją odwrotną w stosunku do poprzedniej, mianowicie:

$$\forall_y\exists_x Rxy \Rightarrow \exists_x\forall_y Rxy.$$

1	$\forall_y\exists_x Rxy$;	
2	$\neg\exists_x\forall_y Rxy$;	
3	$\exists_x Rxa$	1;
4	Rba	3;
5	$\neg\forall_y Rby$	2;
6	$\neg Rbc$	5.

Tabela się nie zamyka, bo żeby uzyskać sprzeczność (wiersza 5 z 4), trzeba by y w 5 zastąpić przez a, ale, wobec wystąpienia a w 4, nie pozwala na to zastrzeżenie należące do reguły $(\neg\forall)$. A zatem formuła okazuje się niedowodliwa. Widać to także z interpretacji predykatu R jako relacji większości: prawdą jest, że w zbiorze liczb naturalnych dla każdej liczby istnieje liczba od niej większa (poprzednik naszej formuły), nie jest zaś prawdą, że istnieje liczba większa od każdej liczby (następnik formuły).

Metoda tabel analitycznych, podobna do podejścia Hintikki [1955], dzieli też pewne rysy z metodą tabel semantycznych Betha [1955]. Jest im wspólne poszukiwanie **kontrprzykładu** dla dowodzonej formuły: znajdujemy go, gdy się okaże, że zaprzeczenie danej formuły jest spełnialne, to znaczy nie prowadzi do sprzeczności. Różni je natomiast to, że reguły tabel analitycznych dotyczą jedynie opuszczania (stałych logicznych), a także to, że formuły, które w tabeli analitycznej są negacjami, w tabeli semantycznej pisane są bez znaku negacji, a za to w osobnej kolumnie zatytułowanej

[16] Dowód tej samej formuły metodą wprost podany jest wcześniej, w odcinku 4.3 jako przykład P.5. Gdy idzie natomiast o wykazanie, że implikacja odwrotna nie jest prawem logiki, metody systemu SB nie są wystarczające; tamten system służy tylko do dowodzenia praw logiki, nie zaś do wykazywania, że badana formuła nie jest prawem. Ta możliwość rozstrzygania także negatywnego stanowi istotny walor tabel analitycznych.

'fałsz'; pozostałe formuły wpisuje się w kolumnie zatytułowanej 'prawda'. Z faktu posłużenia się tymi dwoma podstawowymi pojęciami semantyki bierze się termin 'tabele semantyczne'. Tabela semantyczna się zamyka, gdy dla każdej formuły atomowej z jednej kolumny istnieje równokształtna z nią formuła w drugiej kolumnie.

5.4. Wnioskowanie a rozumowanie. Termin 'wnioskowanie' jest wzięty z potocznego języka, co stwarza pewne problemy znaczeniowe, bo nawet po technicznych uściśleniach nie da się uniknąć wzajemnych oddziaływań sensu technicznego z potocznym. Do tego dochodzi obecność takich terminów jak 'rozumowanie', 'dowodzenie' itp., o których trudno powiedzieć, czy są w polskim równoznaczne, czy tylko bliskoznaczne, czy pozostają w jeszcze innym stosunku. A kiedy logicy próbują je uściślić to pomnaża to jeszcze ilość znaczeń, bo przybywa nowych definicji, a dawne znaczenia nie przestają funkcjonować.[17]

Obecny rozdział swoim tytułem wskazuje na istnienie pewnego podziału wnioskowań, mianowicie podziału na dedukcyjne i jakieś inne; w swej zaś treści zajmuje się wyłącznie wnioskowaniami dedukcyjnymi, co zwalnia od powtarzania tego przymiotnika za każdym razem. Poprawnym **wnioskowaniem dedukcyjnym** nazywamy takie, w którym wniosek wynika logicznie z przesłanek. Do głównych zadań logiki predykatów należy określenie kryteriów wynikania logicznego. Jedno z kryteriów posługuje się pojęciem tautologii czyli prawa logiki, drugie pojęciem reguł wnioskowania. Podanie zbioru reguł wnioskowania wtedy się nadaje na takie kryterium, gdy zostało o danym zbiorze udowodnione, iż jest on **pełny**, co znaczy, że każde zdanie będące prawdą logiki predykatów da się udowodnić przy użyciu reguł z tego zbioru. Dla dyskutowanych tu zbiorów istnieją takie dowody.[18]

Istnieją działy logiki zajmujące się wnioskowaniem innym niż dedukcyjne. Wiele uwagi poświęca się metodom wnioskowania, które czynią wniosek prawdopodobnym na podstawie danych przesłanek; nie gwarantują one jednak, że będzie on napewno prawdziwy, nawet gdy taka pewność przysługuje przesłankom. Typowym tego przykładem jest **wnioskowanie indukcyjne** polegające na tym, że ze zdań o faktach, a więc odznaczających się pewnością, dochodzimy do hipotez, które są tylko prawdopodobne; np. na podstawie wielu obserwacji, że spożyciu masła towarzyszy wzrost ilości cholesterolu w organizmie, jakiś badacz przyjmuje hipotezę, że spożywanie masła jest przyczyną wzrostu cholesterolu.[19]

Wnioskowanie nazywamy **dowodzeniem**, gdy służy ono do wykazania, że jakieś zdanie jest twierdzeniem danej teorii, tj. wynika z jej aksjomatów. Kiedy ten sam wniosek nasunie się spontanicznie, to znaczy jego autor nie stawiał sobie zadania by znaleźć dlań przesłanki i z tych przesłanek go wywieść, takiemu wnioskowaniu nie przysługuje miano dowodzenia.

Termin 'rozumowanie' jest czasem używany zamiennie ze słowem 'wnioskowanie'. Znajduje to pokrycie w fakcie, iż zdarza się, że proces dochodzenia do wniosku sprowadza się bez reszty do wnioskowania w sensie tego rozdziału, a więc do przetwarzania przesłanek we wniosek wedle reguł gwarantujących zachowanie prawdziwości (o ile przysługuje ona przesłankom). Nie zawsze jednak przesłanki mamy gotowe, czasem występują one jedynie w postaci niezwerbalizowanej intuicji, i wtedy integralną częścią w procesie poszukiwania wniosku staje się tworzenie nowych pojęć, lub dopracowanie już posiadanych, w celu językowego wysłowienia owych intuicji. Takie tworzenie lub przetwarzanie pojęć zostało tu nazwane **konceptualizacją**.

Przyglądanie się realnie stosowanym argumentom pozwala zauważyć, że błędy w dochodzeniu do konkluzji częściej biorą się z wadliwej konceptualizacji niż z wadliwego wnioskowania. Żeby

[17] O próbach takich uściśleń, podejmowanych przez logików polskich, informuje zwięźle artykuł 'Klasyfikacja rozumowań' w MEL.

[18] W sprawie pojęcia pełności zob. ELF, XIV. Literaturę na temat dowodów pełności logiki pierwszego rzędu podaje ELF, II, odc. 5, a w odniesieniu do systemu tabel analitycznych ELF, VI, odc. 4.5.

[19] Podstawowe wiadomości o wnioskowaniu indukcyjnym można znaleźć w ELF, XLV ("Prawdopodobieństwo") i w MEL, art. "Wnioskowanie statystyczne".

móc poświęcić konceptualizacji należytą uwagę, potrzebujemy takiego terminu, który objąłby swym zakresem zarówno czyste wnioskowania, nie mające w sobie elementu konceptualizacji, jak i takie procesy myślowe, w których wnioskowanie splata się nierozdzielnie z konceptualizacją, tak że opis dochodzenia do wniosku nie jest możliwy bez uwzględnienia czynnika konceptualizacji. Dla tej klasy nadrzędnej został zaproponowany w obecnej książce termin **rozumowanie**. Ostatni jej rozdział dopełni poprzednich przez analizę tych sposobów konceptualizacji, które polegają na stosowaniu różnego rodzaju definicji. Niezbędnym do tego narzędziem będzie znowu logika predykatów.