Użyteczne na codzień reguły wtórne względem systemu TA, a nadto reguła zastępowania i reguła dowodzenia implikacji

§**1. Formalno-logiczne reguły wnioskowania**, zwane krócej regułami wnioskowania, są to przepisy, które określają, jak przekształcać zdania prawdziwe, żeby otrzymać znów zdanie prawdziwe.

Przemiotnik „formalno-logiczne" odróżnia przepisy wnioskowania niezawodnego od tych reguł, które choć poznawczo użyteczne nie mają cechy niezawodności; takimi są np. reguły wnioskowania statystycznego (zob. art. „Wnioskowanie statystyczne" w *Małej encyklopedii logiki*).

To, jaką należy zastosować regułę, zależy od **formy logicznej** danego zdania, tzn. od struktury wyznaczonej przez kształt i rozmieszczenie operatorów logicznych (funktorów prawdziwościowych i kwantyfikatorów). Zdania poddane przekształceniu nazywa się **przesłankami**, zdanie powstające z przekształcenia **– wnioskiem**.

Każda reguła wnioskowania swą niezawodność zawdzięcza odpowiadajęej jej tautologii logicznej w formie implikacji. Odpowiedniość ta polega na następujących przyporządkowaniach.

- poprzednik implikacji — przesłanki w regule

Jeśli poprzednik jest koniunkcją, rozpada się na tyle przesłanek, ile członów ma dana koniunkcja;

- następnik implikacji — wniosek w regule;
- symbol implikacji — symbol wnioskowania,

np. kreska oddzielająca wniosek od przesłanek, pozioma lub skośna (w kształcie $/$),

Rozważmy tautologię $A \Rightarrow B$ oraz takie jej podstawienie, przy którym poprzednik A jest prawdziwy. W tautologii, powiedzmy, $\neg(\neg p) \Rightarrow p$ poprzednik można uczynić prawdziwym, biorąc za p np. zdanie „$1 > 0$". Wtedy i następnik musi być prawdziwy, bo implikacja z prawdziwym poprzednikiem i fałszywym następnikiem byłaby fałszywa, a nasza implikacja, jako tautologia, nie może być fałszywa.

Jeśli więc użyjemy prawdziwego poprzednika w roli przesłanki, to jej prawdziwość będzie gwarancją prawdziwości pokrywającego się z następnikiem wniosku. Stosunek zachodzący wewnątrz tautologicznej implikacji określa się powiedzeniem, że następnik **wynika logicznie** z poprzednika. Z racji utożsamienia poprzednika tautologii z przesłankami reguły, a następnika z jej wnioskiem, wniosek w regule wynika logicznie z przesłanek. Dzięki temu, na przykład,

[Przyk.1] *to, że z* $\neg(\neg p)$ *wynika logicznie* p *zapewnia niezawodność regule* $\neg(\neg \phi) / \phi$.

W regułach przyjęło się w roli zmiennych używać liter greckich (ϕ, ψ etc.) lub dużych liter z początku alfabetu (A, B etc.); wskazuje to na inną rolę tych symboli niż mają zmienne zdaniowe. Używamy innych zmiennych, żeby wskazać, że abstrahujemy od wewnętrznej struktury reprezentowanych przez nie formuł, co zapewnia regułom należytą ogólność.

I tak, zmienna ϕ w powyższym przykładzie reprezentuje nieskończenie wiele formuł zdaniowych: pojedynczą zmienną jak p, jej negację, podwójną, potrójną etc. negację, dowolnie złożoną alternatywę (np. alternatywę dwóch implikacji), dowolnie złożoną implikację itd., itd. W rachunku predykatów wyrażenie $\phi(x)$ oznacza formułę dowolnie złożoną, o której przyjmuje się tylko tyle, że zawiera zmienną x; od tego zaś, czy zawiera jeszcze inne zmienne, abstrahujemy, gdyż nie ma to wpływu na funkcjonowanie danej reguły.

Z dwóch zestawów typograficznych, liter greckich i początkowych dużych łacińskich, stosowany jest niżej ten drugi (dogodniejszy w komputerowej produkcji tekstu).

§**2.** Budując system logiki, ma się do wyboru dwie drogi. Jedna polega na przyjęciu pewnych tautologii jako **aksjomatów**, to znaczy twierdzeń, których się nie dowodzi. Oprócz tego przyjmuje się kilka reguł w celu wyprowadzania nowych twierdzeń bedących tautologiami. Aksjomaty i reguły trzeba tak umiejętnie dobrać, żeby dało się wyprowadzić dowolną (spośród nieskończenie wielu) tautologię i nie dało się wyprowadzić żadnego wyrażenia nie będącego tautologią.

Drugi sposób obywa się bez aksjomatów, ale wtedy zestaw reguł musi być odpowiednio bogatszy, Podobnie jak w poprzedniej metodzie, zestaw ten powinien być tak skomponowany, by dało się wyprowadzić wszsytkie tautologie i tylko tautologie. Dbamy zarazem o to, żeby tych reguł nie było więcej niż jest konieczne; naruszyłoby się ten postulat dołączając do zbioru niezbędnych reguł jakieś inne, które z tych pierwszych wynikają.

Reguły tworzące układ wystarczający i konieczny do wyprowadzenia dowolnej tautologii nazywamy **pierwotnymi**, te zaś, które z pierwotnych dają się wyprowadzić – **wtórnymi**. Błędem byłoby umieszczanie reguł wtórnych wśród pierwotnych. Nie jest jednak błędem, jeśli je dołączymy do systemu (pamiętając o ich wtórności) w celu ułatwiernia i skrócenia wnioskowań; na tej drodze można uzyskiwać warte uwagi korzyści.

Wyprowadzanie reguł wtórnych w systemie TA polega na tym, że przy uzyciu pierwotnych dowodzi się tautologii nadającej się w taki sposób na uzasadnienie potrzebnej nam reguły. To znaczy tautologicznej implikacji, której poprzednik ma identyczną formę (strukturę) logiczną jak przesłanki interesującej nas reguły, następnik zaś identyczną jak wniosek. Jeśli np. wykażemy, za pomocą reguł pierwotnych, że jest tautologią formuła

[F.1] $p \Rightarrow \neg(\neg p)$,

to na tej podstawie wolno przyjąć regułę wtórną (dla systemu TA) pozwalającą z dowolnej formuły wywnioskować jej podwójne zaprzeczenie. Tak do zbioru reguł będących do naszej dyspozycji wprowadzamy regułę dołączania podwójnej negacji:

[$+\neg\neg$] $A\ /\ \neg(\neg A)$.

Dowód F.1 w systemie TA polega, jak zwykle, na hipotetycznym zaprzeczeniu formuły F.1, co prowadzi do założeń p oraz $\neg(\neg(\neg p))$. Stosując do drugiego z nich regułę opuszczania podwójnej negacji z systemu TA, otrzymujemy $\neg p$, co jest sprzeczne z pierwszym z założeń. Skoro zaprzeczenie formuły F.1 prowadzi do sprzeczności, to jest ono fałszem, a więc F.1 jest prawdą. Tak udowodniwszy F.1, mamy prawo przyjąć [$+\neg\neg$] jako regułę wnioskowania z klasy reguł wtórnych, na zasadzie związku ilustrowanego wyżej przez Przyk.1.

W praktyce dogodniej będzie nie przeprowadzać wywodu przez etap dowodzenia tautologiczności formuły, lecz odrazu operować na zapisach reguł, pamiętając, że jest to skrót, którego teoretycznym „zapleczem” jest wywód w rodzaju podanego w poprzednim akapicie. Odrazu więc przyjmujemy jako założenia, że przesłanka reguły jest prawdziwa a wniosek falszywy, potem zaś postępujemy jak przy wykazywaniu tautologiczności formuły.

§**3.** Następujące reguły, wtórne względem systemu TA, a więc dające sie w nim dowieść, należą do stosowanych szczególnie często w praktyce.

1. Reguła dołączania podwójnej negacji – jak wyżej, pod oznaczeniem [$+\neg\neg$].

2. Reguła akceptacji następnika (RAN), inaczej reguła odrywania (RO):
   $A \Rightarrow B,\ A\ /\ B.$

3. Reguła odrzucania poprzednika (ROP):
   $A \Rightarrow B,\ \neg B\ /\ \neg A.$

4. Reguła transpozycji:

$A \Rightarrow B \ / \ \neg B \Rightarrow \neg A.$

5. Reguła akceptacji członu alternatywy:
$A \vee B, \neg A \ / \ B. \quad A \vee B, \neg B \ / \ A.$

6a. Reguła sylogizmu, ogólna:
$A \Rightarrow B, \ B \Rightarrow C \ / \ A \Rightarrow C.$

6b. Reguła sylogizmu dla kwantyfikatorów:
$\forall_x(A(x) \Rightarrow B(x)), \forall_x(B(x) \Rightarrow C(x)) \ / \ \forall_x(A(x) \Rightarrow C(x)).$

7. Reguła składania implikacji (w równoważność):
$A \Rightarrow B, \ B \Rightarrow A \ / \ A \Leftrightarrow B.$

8. RAN z konkretyzacją:
$\forall_x(A(x) \Rightarrow B(x)), \ A(c) \ / \ B(c).$

9. ROP z konkretyzacją:
$\forall_x(A(x) \Rightarrow B(x)), \neg B(c) \ / \ \neg A(c).$

10. Reguła kontrprzykładu:
$A(c), \neg B(c) \ / \ \neg\forall_x(A(x) \Rightarrow B(x).$

Reguły oparte na prawach de Morgana dla kwantyfikatorów:

11. $\neg\forall_x A(x) \ / \ \exists_x \neg A(x);$

12. $\exists_x \neg A(x) \ / \ \neg\forall_x A(x);$

13. $\neg\exists_x A(x) \ / \ \forall_x \neg A(x);$

14. $\forall_x \neg A(x) \ / \ \neg\exists_x A(x).$

§4. Reguły wnioskowania uwzględniające kontekst formuły.

15. Reguła zastępowania:
$A \Leftrightarrow B, \ ...A... \ / \ ...B....$

Jest to przepis o innym charakterze niż poprzednie, wymagający odwołania się do kontekstu, który jest tu schematycznie reprezentowany przez wielokropki. W tej ogólnej postaci reguły zastępowania nie da się wyprowdzić z reguł TA (można wyprowadzić dowolnie wiele jej poszczególnych przypadków, z których każdy stanowi inny kontekst, ale nie ma potrzeby nimi się tu zajmować). Reguła zastępowania pozwala w kontekście dowolnego zdania zastąpić zdanie A będące jego składnikiem przez zdanie B z tym składnikiem równoważne. Taka operacja zachowuje prawdziwość kontekstu, w którym dokonano zastąpienia.

16. Reguła dowodzenia implikacji:

Jeśli B da się wywnioskować z A to $A \Rightarrow B$ jest tautologią.

Także tej reguły nie da się wyprowadzić z reguł systemu TA. Jej niezawodność jest w logice tematem osobnych badań. Ujmując rzecz intuicyjnie, można wskazać na ten rys języka naturalnego, np. polskiego, że na podstawie kontekstu o schemacie:

$A_1, A_2, ...A_n, \ zatem \ B$

wolno w tym języku uznać zdanie warunkowe o schemacie:

jeśli $A_1\ i\ A_2\ i...i\ A_n,\ to\ B$.

Rozważmy przykładowo następujące wnioskowanie.

P1. Każdy heretyk jest indywidualistą.
P2. Żaden indywidualista nie jest pozbawiony odwagi cywilnej,
Zatem
W. Żaden heretyk nie jest pozbawiony odwagi cywilnej.

Wniosek W jest wyprowadzalny z P1 i P2, m.in. za pomocą reguł TA, także za pomocą reguły sylogizmu 6b (to drugie dokonuje się w jednym kroku, podczas gdy pierwsze wymaga ich około dziesięciu; widać tu dobitnie celowość posiadania odpowiednio dobranych reguł wtórnych). Dzięki tej wyprowadzalności okazuje się być prawdą zdanie warunkowe:

[War.] Jeśli P1 i P2, to W.

Takie przechodzenie od wnioskowania do zdania warunkowego jest przyjęte w języku naturalnym. Z łatwościa przechodzimy od sformułowania zawierającego „zatem” do sformułowania w postaci zdania warunkowego. „Myślę więc jestem” powiada Kartezjusz w pewnych kontekstach. a w innych wyraża te zależność zdaniem warunkowym, a nawet obustronnym zdaniem warunkowym (równoważnością): „jestem wtedy i tylko wtedy, gdy myślę” (*Medytacje o pierwszej filozofii*, Medytacja druga).