O budowie teorii dedukcyjnej na przykładzie arytmetyki liczb naturalnych

Arytmetyka liczb naturalnych, tzn., liczb całkowitych nieujemnych (z zerem włącznie) jest teorią, bez której nie da się zbudować metodologii nauk. Nie pora tu, by wyłożyć jej zastosowania bardziej zaawanowane, ale trzeba o nich napomknąć gwoli wyjaśnienia, że warto w jej poznanie inwestować.

W pewnym zastosowaniu bardziej elementarnym, inwestycja ta zwróci się natychmiast. Dostaniemy bowiem wzorowy przykład teorii naukowej o strukturze dedukcyjnej sformalizowanej. Nie wszystkie teorie naukowe mają taką strukturę, charakterystyczną dla matematyki, ale wszystkie w wydatnym stopniu posługują się wnioskowaniem dedukcyjnym, a to najlepiej poznawać u źródła tak obfitego, jakim jest proces budowania arytmetyki i jego wynik w postaci uzyskanej teorii.

Drugi pożytek metodologiczny z poznania wzorcowej teorii dedukcyjnej polega na możliwości uchwycenia podobieństw i różnic w porównaniu z teoriami w naukach innego typu metodologicznego – przyrodniczych, społecznych, filozoficznych. Te inne możemy lepiej w aspekcie metodologicznym rozumieć dzięki takiemu punktowi odniesienia.

Arytmetyka otrzymała strukturę dedukcyjną, polegającą na akjomatyzacji, ale jeszcze nie formalizacji (będącej, jak zobaczymy, wyższym piętrem dedukcyjności) pod koniec wieku 19-go za sprawą włoskiego matematyka Giuseppe Peano. Stąd nazywa się ją często arytmetyką Peano, choć nie jest to dokładne, bo późniejsze wersje różnią się w pewnych punktach od tej wyjściowej.

Wykorzystana tu wersja aksjomatyki pochodzi z książki Andrzeja Grzegorczyka *Zarys arytmetyki teoretycznej* (PWN, Warszawa 1971). Przyjmujemy, że zmienne indywiduowe x, y, z etc. odnoszą się do liczb naturalnych czyli, że zbiór liczb naturalnych stanowi dziedzinę (uniwersum) rozważań arytmetyki. Oto aksjomaty arytmetyki w wersji podanej przez Grzgorczyka.

---

c. d. n.