III. Klasyczny rachunek zdań
Świat funkcji prawdziwościowych

Tło historyczne. Myśl, że wnioskowanie, podstawowy przedmiot logiki, można ująć w formie rachunku, pojawiła się w 17tym wieku u Thomasa Hobbesa. Jak ją zrealizować, przemyśliwał Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), który skonstruowawszy maszynę arytmetyczną, snuł potem projekty logicznej. Była to myśl otwierająca przed logiką nowy kierunek rozwoju. Jak nowy, świadczy fakt, że w ówczesnej strukturze uniwersytetów, sięgającej średniowiecza, logika należała do innego kursu studiów niż dyscypliny matematyczne, mianowicie do trzech (łac. *trivium*), obok gramatyki i retoryki, nauk o języku, podczas gdy cztery (*quadrivium*) ówczesne nauki matematyczne były traktowane jako kurs osobny i bardziej zaawansowany.

Zbliżenie do matematyki nie wyrwało jednak logiki z grona nauk humanistycznych. Widać to w tym, że się ją uprawia zarówno w instytutach filozoficznych jak i matematycznych. Inne partie humanistyki, jak lingwistyka, ekonomia, socjologia czy psychologia, zaczęły się też z biegiem czasu matematyzować; logika więc odegrała w tym procesie rolę awangardy. Z drugiej zaś strony, rozwój logiki w 20tym wieku pokazał, wbrew programowi z wieku 17go, jak niezbywalny jest w niej samej, a także w matematyce, ów element intuicji, uchodzący dotąd za osobliwość umysłu humanistycznego.

Teoria, na której wspiera się dziś gmach logiki, zwana rachunkiem zdań, nie była obecna w dziele Arystotelesa *Analityki* z połowy 4go wieku przed Chr., od którego datujemy rozwój logiki. Pierwsze idee przypominające dzisiejszy rachunek zdań pojawiły się o wiek później w filozoficznej szkole Stoików, a pod koniec średniowiecza zostały wzięte na warsztat scholastyków. Potem poszły w zapomnienie, a od nowa zbudował logikę w postaci rachunkowej niemiecki matematyk Gottlob Frege (1848–1925) w pracy [1879].

Frege, a także Bertrand Russell (1872–1970) w Anglii i Giuseppe Peano (1858–1932) we Włoszech, tworzyli logikę z myślą o dostarczeniu precyzyjnego języka matematyce. Stąd, jej gramatyka odpowiada składni języka matematycznego. Z tego powodu, a także dlatego, że jest to pewien rachunek, nowa teoria była zrazu nazywana *logiką matematyczną*. Okazało się jednak, że jest ona w swych zastosowaniach tak uniwersalna, iż nie wymaga odróżniania przymiotnikiem. Toteż odróżniamy przydawką raczej tę dawną, określając ją nazwą *logiki tradycyjnej*; miano matematycznej odnosimy dziś do tych działów logiki, które w sposób zmatematyzowany traktują o strukturze i własnościach teorii matematycznych.

Pojawiło się natomiast wewnątrz logiki odróżnienie jej trzonu zwanego logiką klasyczną lub rachunkiem klasycznym od pewnych teorii alternatywnych, a więc nie-klasycznych. Jedne z nich brały się z odmiennego spojrzenia na matematykę (logika zwana intuicjonistyczną), inne tworzono z myślą o dostosowaniu do problematyki filozoficznej. Pionierem tego drugiego kierunku był polski logik Jan Łukasiewicz (1878–1956), znany jako twórca pierwszych logik wielowartościowych, tzn. operujących więcej niż dwiema wartościami. **Logika klasyczna** jest dwuwartościowa w tym sensie, że traktuje każde zdanie jako bądź prawdziwe bądź fałszywe; prawdę zaś i fałsz nazywa się **wartościami logicznymi**. Łukasiewicz uważał, że istnieją zdania ani prawdziwe ani fałszywe, a należą do nich wypowiedzi o zdarzeniach przyszłych. Gdy spojrzymy na logikę jako na rachunek wartości logicznych, rachunek klasyczny odznacza się tym, że operuje tylko dwiema wartościami. Innym samoograniczeniem rachunku klasycznego jest pominięcie problematyki rozumowań zawierających terminy modalne, to jest takie, jak „jest konieczne, że” czy „jest możliwe, że”. Metody rozumowania za pomocą takich terminów są przedmiotem *logiki modalnej*; uzupełnia ona klasyczną w sposób, który jest istotny z filozoficznego punktu widzenia.

Pozytywne określenie przedmiotu logiki klasycznej, czyli takie, które nie poprzestaje na wskazaniu ograniczeń, jest zawarte w drugiej części tytułu. Obiektami badanymi w rachunku zdań są funkcje prawdziwościowe. Są to operacje na wartościach logicznych, które w wyniku dają znowu jakąś wartość logiczną: prawdę lub fałsz (nazywamy te funkcje prawdziwościowymi, biorąc nazwę od jednej z wartości). Charakterystyka tych operacji służy do tego, by rozpoznawać prawa logiki, a dzięki temu odróżniać wnioskowania poprawne od błędnych.

Konstrukcja rozdziału. Pierwsza część omawia pojęcie funkcji prawdziwościowej, druga funkcje najbliższe językowi naturalnemu, tj. negację i koniunkcję, a część trzecia pozostałe funkcje potrzebne do analizy rozumowań w języku naturalnym. Część ostatnia dostarcza środków do takiej analizy, którymi są algorytm zerojedynkowy i pojęcie wynikania logicznego.

1. Pojęcie funkcji prawdziwościowej

1.1. Funkcje, czyli operacje, jako rodzaj relacji. Na każdym kroku spotykamy się z relacjami, które noszą też nazwę stosunków (terminy te są używane zamiennie). Zauważamy np., że z dwóch ludzi jeden jest wyższy od drugiego i tym samym mamy w polu widzenia stosunek większości. Relacja jest orzekana o conajmniej dwóch przedmiotach, i wtedy nazywa się dwuczłonowa, a w przypadku większej liczby przedmiotów jest trójczłonowa, czwórczłonowa itd. Gdy coś się orzeka o jednym tylko przedmiocie, np. o Gawle, że jest hulaką, to można by mówić o relacji jednoczłonowej, ale używa się raczej terminu cecha lub własność.

Wśród rodzajów relacji zajmiemy się dla potrzeb obecnych rozważań odmianą, którą określa się terminami **relacja jednoznaczna** lub **funkcja**.[1] Są takie stosunki, zauważmy, że gdy po jednej stronie stosunku może być wiele przedmiotów, to po drugiej tylko jeden. I tak np. każdy ma tylko jedną matkę (choć ta sama matka może mieć wiele dzieci), stąd relacja mieć-matkę należy do jednoznacznych. Gdy w kraju rządzi jeden król, jednoznaczna jest relacja być-poddanym-króla; nie jest taką natomiast odwrotna do niej relacja królowania (chyba, że w jakimś osobliwym świecie, gdzie nie wolno mieć królowi więcej poddanych niż jednego).

Jeszcze przykład z innej dziedziny. W dobrze funkcjonującej maszynie, określonemu posunięciu operatora maszyny odpowiada jedno i tylko jej jedno zachowanie: gdy skręcę kierownicę w prawo, samochód skręci na prawo, a nigdy nie skręci w lewo ani nie odmówi skrętu; co więcej, określonemu kątowi przesunięcia kierownicy odpowiada (w danej maszynie) określony, taki a nie inny i zawsze taki sam (w tych samych warunkach) skręt kół. Powiemy przeto, że ustawienie kół jest funkcją ustawienia kierownicy.

> Pojęcie funkcji podlegało ewolucji. W 1749 Leonard Euler określił funkcję jako *wielkość zmienną, która jest zależna od innej wielkości zmiennej*. Oczywiście, wielkość skrętu kół jest zależna od wielkości skrętu kierownicy, a obie są zmienne. To pojęcie funkcji zakłada, że członami danej relacji są jakieś mierzalne wielkości, czego nie było w przykładach z matką i z królem. Matematycy, którzy z końcem 19go wieku nadali logice nową postać (jak G. Frege, B. Russell, G. Peano i in.) przetworzyli pojęcie Eulera w taki sposób, że nabrało ono większej ogólności przez opuszczenie warunku, który ograniczał funkcje do wielkości mierzalnych; stąd, mogły się znaleźć w tej kategorii takie m.in. „ludzkie" stosunki, jak posiadanie matki. Zachowała się jednak w tym uogólnieniu istotna własność, że przyporządkowanie jednego obiektu (już nie koniecznie wielkości) innemu obiektowi jest jednoznaczne.

Członami relacji mogą być też pary, trójki etc. Na przykład, decyzję na jakieś działanie uzależniamy od jego użyteczności, a ta zależy od (a) korzyści, której się po nim spodziewamy oraz (b) wiedzy o tych okolicznościach ewentualnego działania, od których zależą szanse powodzenia; jest to istotne, bo nawet złota góra ma niewielką wartość, gdy jej zdobycie jest wysoce wątpliwe. Toteż powiada się w matematycznej teorii decyzji (spokrewnionej i z logiką i z pewnymi partiami ekonomii), że użyteczność działania jest funkcją owych dwóch czynników, tj. a oraz b. Nazywa się ją *funkcją użyteczności* (ang. *utility function*).

---

[1] Pełniejsze przedstawienie rodzajów relacji znajduje się dalej: zob. rozdz. piąty, odc. 2.2 i rozdz. szósty, odc. 3.1.

Typowym przykładem funkcji są działania arytmetyczne zachodzące w zbiorze, powiedzmy, liczb całkowitych. Np. mnożenie przyporządkowuje każdej parze liczb dokładnie jedną liczbę. Toteż mnożenie zaliczamy do funkcji. Tak oto świat poddany prawom matematyki jest światem całkowicie obliczalnym, w którym nie może się zdarzyć, żeby dwa razy dwa dawało czasem cztery, a czasem pięć. Nazywamy też funkcje działaniami lub operacjami; zwłaszcza ten drugi termin często jest używany używany zamiennie z terminem „funkcja".

1.2. Funkcje w zbiorze wartości logicznych. Żeby przejść do funkcji właściwych logice, zacznijmy od prostego spostrzeżenia, że istnieją zdania prawdziwe i zdania fałszywe. Prawdziwość zdania oznaczamy symbolem „1", a fałszywość symbolem „0".

Abstrakcyjne obiekty 1 i 0 tworzą dwuelementowy zbiór **wartości logicznych**. Na elementach tych wykonujemy pewne operacje, co znaczy, że zachodzą między nimi relacje z gatunku funkcji. Aby je opisać, trzeba jeszcze uzupełnić język służący do mówienia o funkcjach. Oto następne pojęcia.

Elementy tego zbioru, w którym znajdują się obiekty jednoznacznie czemuś przyporządkowane przez daną relację F nazywamy **wartościami funkcji** F, zaś elementy pozostałego zbioru nazywamy **argumentami funkcji** F. Na przykład, operacja dzielenia przyporządkowuje każdej parze ze zbioru liczb całkowitych (jeśli pominiemy 0) dokładnie jedną liczbę ze zbioru ułamkowych, przy czym ta sama liczba ułamkowa jest przyporządkowana wielu (a nawet nieskończenie wielu) parom liczb całkowitych, np. ułamek $\frac{1}{2}$ jest przyporządkowany parom 1 i 2, 2 i 4, 3 i 6 itd. Widać dobrze na tym przykładzie, że przyporządkowanie jednoznaczne nie musi zachodzić w obie strony; gdy zaś zachodzi, mówimy wtedy o **relacji wzajemnie jednoznacznej**.

Zbiory, z których jeden dostarcza argumentów funkcji, a drugi jej wartości, nie muszą być różne. Może się zdarzyć, że i argumenty i wartości pochodzą z dokładnie tego samego zbioru. Tak właśnie jest ze zbiorem złożonym z 1 i 0; funkcje logiczne, o których będzie tu mowa biorą swe argumenty i swe wartości z tego jednego zbioru. Funkcje te są określane terminem **prawdziwościowe**, ponieważ dotyczą prawdy lub jej zaprzeczenia (tzn. fałszu), a więc w ten lub inny sposób mają do czynienia z prawdą.

Koniunkcja i negacja

2.1. Tabele dla negacji i koniunkcji. Systematyczny przegląd funkcji prawdziwościowych odłożymy do następnego odcinka; tu zaś rozważamy przykładowo dwie z nich. Symbol funkcji prawdziwościowej nazywamy **funktorem prawdziwościowym**.

Rozważymy dwa funktory prawdziwościowe, jeden zwany negacją lub przeczeniem drugi koniunkcją. Oba są obecne w języku polskim: negacja jako zwrot „nie jest prawdą, że" (lub jakiś z nim równoznaczny), koniunkcja zaś jako spójnik „i" (lub jakiś z nim równoznaczny, np. „oraz"). Oto ich definicje.

Negacja ma tę własność, że kiedy jej funktorem poprzedzi się zdanie prawdziwe, to przemienia on je w zdanie fałszywe, a gdy poprzedzi się nim fałszywe, to nastąpi przemiana w prawdziwe.

Koniunkcja ma tę własność, że aby była prawdziwa, oba zdania składowe połączone jej funktorem powinny być prawdziwe. W każdym innym przypadku, a więc gdy fałszywy jest jeden ze składników lub oba, koniunkcja jest fałszywa.

Definicje te dadzą się przejrzyście zapisać w tabelkach, w których argumenty zdaniowe funkcji są reprezentowane literami p i q, symbolem zdania prawdziwego jest 1, fałszywego 0, zaś funktorami negacji i koniunkcji są, odpowiednio, symbole $\sim$ i $\wedge$.

W tabelce $\mathtt{TN}$, tj. dla negacji, pierwsza kolumna podaje wartości argumentu a druga wartości funkcji (przy danej wartości argumentu). W tabelce $\mathtt{TK}$, tj. dla koniunkcji, pierwsze dwie kolumny podają wartości argumentów, a trzecia wartości funkcji.

TN

p	$\sim p$
1	0
0	1

TK

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

2.2. Negacja i koniunkcja a logika naturalna. Z powyższych tabelek da się wyprowadzić ważną naukę w kwestii stosunku pomiędzy teorią logiczną oraz **logiką naturalną**, to jest tą wrodzoną każdemu z nas, a przejawiającą się w językach etnicznych, np. w polskim. Zamiast zwrotu w liczbie mnogiej „języki etniczne" dogodnie będzie posługiwać się zwrotem „**język naturalny**", rozumiejąc pod nim ogół języków etnicznych.

Tabelki pokazują naocznie, że klasyczny (tj. z klasycznego rachunku zdań) funktor negacji $\sim$, jak i klasyczny funktor koniunkcji $\wedge$, są symbolami funkcyjnymi w dokładnie takim samym sensie, jak są nimi np. symbole działań arytmetycznych. To jest fakt niewątpliwy. Żeby wyciągnąć z tabelek zapowiedzianą naukę, to prócz tego faktu trzeba jeszcze uznać, że zwrot „nie jest prawdą, że" oraz spójnik „i" mają w pewnych zastosowaniach, to samo znaczenie, które przysługuje, odpowiednio, logicznym funktorom negacji i koniunkcji. Jak widać, precyzyjne pojęcia logiczne mają odpowiedniki w mniej precyzyjnych, ale przydatnych praktycznie, pojęciach wrodzonych, które znajdują swój wyraz w języku naturalnym.

Trzeba tu zauważyć właściwą językowi naturalnemu ekonomię polegającą na tym, że to samo co do kształtu wyrażenie ma czasem kilka znaczeń, które dadzą się rozróżniać za sprawą kontekstu, czy to tekstowego czy sytuacyjnego (tj. okoliczności spoza języka towarzyszących tekstowi). Dzięki temu słownik danego języka nie rozrasta się ponad jakieś niezbędne minimum. Oto na przykład, gdyby przełożyć jednoznaczność nad ekonomiczność, to oprócz spójnika „i" łączącego zdania trzeba by mieć osobne słowo dla takich kontekstów jak „Jaś i Małgosia są parą", z których tego „i" międzynazwowego nie da się wyeliminować na rzecz konstrukcji spójnikowej w rodzaju „Jaś jest parą i Małgosia jest parą". Różnych znaczeń „i" jest jeszcze więcej, tak więc odpowiedź na postawione wyżej pytanie musi być ograniczona do jednego ze znaczeń. Pytanie zatem brzmi, czy istnieją w języku naturalnym (egzemplifikowanym tu przez polski) takie konteksty, w których zwrot „nie jest prawdą, że" oraz spójnik „i" odpowiadają co do swej roli klasycznym funktorom negacji i koniunkcji. Odpowiedź twierdząca uzasadnia stosowanie klasycznego rachunku zdań do analizy i oceny wnioskowań przeprowadzanych w języku naturalnym.

Zostało już zasygnalizowane, że ten sam (co do brzmienia) funktor języka naturalnego może mieć w danym języku więcej niż jedno znaczenie. Z drugiej strony, należy zauważyć, że to samo znaczenie może być podkładane pod różne funktory. Oto przykłady. Ze słówkiem „i" równoznaczne jest „oraz", a w staropolskim mieliśmy jeszcze „tudzież". Sens koniunkcji występuje jako składnik w znaczeniu spójnika „a" oprócz drugiego składnika znaczeniowego, który służy jakiemuś przeciwstawieniu. W zdaniu „Magda jest grzeczna a Jaś niegrzeczny" (i) stwierdza się współzachodzenie dwóch faktów, a więc współprawdziwość opisujących je zdań, do czego służy funktor koniunkcji, a ponadto (ii) wyraża się przekonanie, że te fakty są sobie jakoś przeciwstawne. Jeśli takie zdanie wystąpi w rozumowaniu, którego poprawność zechcemy ocenić w świetle logiki, to weźmiemy pod uwagę jedynie składnik pierwszy, a drugi zignorujemy jako nieistotny z punktu widzenia poprawności wnioskowania.

Przykładem na nieszkodliwość takiego ignorowania w procesie analizy logicznej może być to, że zarówno ze zdania o budowie p i q jak i ze zdania o budowie p a q wynikają zdania o budowie p, o budowie q, dalej q i p (przemienność członów koniunkcji), i tak dalej, wedle tych samych reguł klasycznego rachunku. Słówko „a" ma swoje bliskoznaczniki, jak „ale", „lecz", „jednak", „natomiast". Ten składnik znaczenia wyrażenia, który pokrywa się ze znaczeniem jakiegoś funktora prawdziwościowego będziemy określać jako **trzon prawdziwościowy** danego wyrażenia.

Także negację wyrażamy po polsku na różne sposoby. Można poprzedzić zdanie zwrotem „nie jest tak, że", zwrotem „nie ma miejsca fakt, że" itp. Zwroty tego rodzaju brzmią nieraz sztucznie, toteż dobra stylistyka wymaga ograniczenia ich zastosowań do określonych sytuacji, na przykład gdy pada zarzut mówienia nieprawdy: „Nie jest tak, że [domyślne ‘jak twierdzisz’] ty pamiętasz o moich urodzinach”. Najprostszym i najczęstszym sposobem zaprzeczania właściwym językowi naturalnemu jest poprzedzenie orzeczenia słowem (w przypadku polskiego) „nie”, jak w zdaniu „Ty nie pamiętasz o moich urodzinach”. W języku polskim to „nie” przed orzeczeniem obowiązuje także wtedy, gdy nastąpiło zaprzeczenie podmiotu; takie dwie negacje nie likwidują się wzajemnie (jak czynią w łacinie, angielskim, niemieckim i in.), stąd powiedzenie „Nikt nie woła”, podczas gdy po łacinie powiedziałoby się „Nemo vocat”, a po angielsku „Nobody cries” („Nobody does not cry” byłoby błędem gramatycznym, bo negacja jest już zawarta w „nobody”).

Podobne komentarze będą potrzebne w odniesieniu do innych funktorów klasycznego rachunku zdań oraz ich odpowiedników w języku naturalnym, dla których będziemy w każdym przypadku poszukiwać ich trzonu prawdziwościowego. Zajmiemy się obecnie trzema innymi funkcjami spośród tych pięciu, które (razem z omówionymi) występują w większości ujęć klasycznego rachunku zdań.

3. Alternatywa, implikacja, równoważność

3.1. Alternatywa. Rozważmy obecnie taką funkcję, która przybiera wartość prawdy, gdy przynajmniej jeden z jej argumentów jest prawdą, a więc ma ona wartość fałszu wtedy i tylko wtedy, gdy oba argumenty są fałszem. Funkcja ta nazywa się **alternatywą**. Charakteryzuje ją następująca tabela.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

TA

Założenie, że zachodzi conajmniej jedno z dwojga, bądź p bądź q (takich członów może być więcej) pojawia się często we wnioskowaniach, na przykład w eliminowaniu hipotez. Mianowicie, gdy dysponujemy zbiorem hipotez, o którym wiemy, że przynajmniej jedna z hipotez musi być prawdziwa, nie wiemy jednak która, to wyjściową przesłanką wnioskowania jest alternatywa owych hipotez. Potem, jak to czyni np. detektyw w toku śledztwa, eliminujemy poszczególne człony jako sprzeczne z poznanymi w międzyczasie faktami, i wtedy ostatni, który pozostał zasługuje na uznanie go za prawdę.

Występujący w tym rozumowaniu zwrot „przynajmniej jedno z” dobrze oddaje treść przesłanki, ale jest na tyle niewygodny, że warto znaleźć krótsze słowo o charakterze spójnika, który by łączył argumenty alternatywy w jedno zdanie. W języku polskim stosunkowo dobrze nadaje się do tej roli spójnik „lub”. Nie będzie tu doskonałej odpowiedniości, ponieważ typowe w polskim użycie „lub” służy też do wyrażenia, że mówiący nie wie, który z członów jest prawdziwy; wie tylko, że przynajmniej jeden. Tego składnika znaczeniowego nie ma w funktorze prawdziwościowym $\vee$. Ale skoro poprawność wnioskowań zawierających „lub” nie zależy od tego, co przy ich okazji wyraża się o stanie własnej wiedzy, nie ma przeszkody by z logicznego punktu widzenia interpretować „lub” jako funktor alternatywy.

Trafność tej interpretacji potwierdza się, gdy weźmie się pod uwagę stosunek zdania alternatywnego do równoważnego mu zdania zapisanego za pomocą koniunkcji z negacją. Okazuje się, gdy sięgniemy do odpowiednich tabelek, że formuła:

(3.1). 1 $\quad p \vee q$

przybiera dla każdego z podstawień za p i q tę samą wartość, co formuła:

(3.1). 2 $\quad \sim (\sim p \wedge \sim q)$.

Znaczy to, że tę samą treść można wypowiedzieć za pomocą zdania w formie 1 i za pomocą zdania w formie 2, o ile w miejscach p i q znajdą się te same zdania składowe.

Po to, by po przejściu do porównań z językiem polskim mieć do czynienia z formułą prostszą niż 2, przekształćmy obie w ten sposób, że każdą z nich zanegujemy. Jeśli bowiem obie wyrażają to samo, to zaprzeczenie jednej wyraża to samo, co zaprzeczenie drugiej; możemy więc równie dobrze dokonywać porównań z językiem polskim, biorąc pod uwagę owe zaprzeczenia. Ponieważ wyrażenie 2 stanowi negację formuły $\sim p \wedge \sim q$, to po jeszcze jednym zanegowaniu, otrzymamy z 2 znów tę formułę (zgodnie z prawem podwójnego przeczenia). Mamy więc do porównania formuły:

(3.1). 3 $\quad \sim (p \vee q)$

(3.1). 4 $\quad \sim p \wedge \sim q.$

Aby dostrzec, że są one zamienne, czyli równoważne, wsłuchajmy się w następujący dialog. Ktoś zadaje pytanie, gdzie studiowała pani Margaret Thatcher, na co odpowiadają, każda inaczej, dwie osoby: A i B.

A: Studiowała w Londynie lub w Edynburgu.
B: Nieprawda.
A: Skąd wiesz?
B: Bo sprawdziłem, że nie studiowała w Londynie i nie studiowała w Edynburgu.
A: Jeśli tak, to istotnie, pomyliłem się.

Osoby dialogu są tu posłuszne prawu logiki, które funkcjonuje — jak widać — także w języku naturalnym, mianowicie prawu, że koniunkcja zaprzeczeń dwóch zdań da się zastąpić alternatywą tychże zdań. Mianowicie:

(3.1). 5 $\quad \sim (p \vee q)$ można zastąpić przez $(\sim p \wedge \sim q)$.

Zachodzi także związek w pewien sposób symetryczny względem powyższego, mianowicie:

(3.1). 6 $\quad \sim (p \wedge q)$ można zastąpić przez $(\sim p \vee \sim q)$.

Zdania 5 i 6, gdy się je zapisze w pełni symbolicznie, tj. wyrazi sie zastępowalność symbolem $\Leftrightarrow$, o którym mowa dalej, w 3.2),[B nazywają się prawami de Morgana dla logiki zdań (od nazwiska angielskiego logika z 19go wieku; analogiczne prawa występują w logice predykatów i w teorii zbiorów). Pokazują one, że sens funktora alternatywy z rachunku zdań pokrywa się, w zastosowaniue do wnioskowań, z sensem spójnika „lub" w polszczyźnie. Jeśli bowiem zgodziliśmy się (o czym była mowa w 2.2), że funktory negacji i koniunkcji pokrywają się znaczeniem, odpowiednio, ze zwrotem przeczącym „nieprawda, że" i spójnikiem „i", a teraz okazuje się, że za pomocą negacji z koniunkcją można wyrazić zarówno alternatywę rachunku zdań (tj. formułę z $\vee$), jak i alternatywę języka polskiego (z „lub"), to spójnik „lub" stanowi adekwatny logicznie przekład funktora $\vee$.

3.2. Implikacja i równoważność. Podobnie jak w poprzednim odcinku postąpiliśmy z alternatywą, postąpimy obecnie z kolejną funkcją rachunku zdań, która nosi nazwę implikacji. Mianowicie, znajdziemy równoważną implikacji formułę skonstruowaną z negacji i koniunkcji, a następnie pokażemy, że ta równoważność zachodzi też dla odpowiednich konstrukcji w języku polskim.

Implikacja jest to funkcja prawdziwościowa, która przybiera wartość 0 wtedy i tylko wtedy, gdy jej pierwszy argument ma wartość 1, a drugi wartość 0; w każdym innym przypadku implikacja ma wartość 1. Przedstawia to następująca tabelka.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

TI

Porównajmy ją z tabelką `TI*`, która podaje wyniki obliczenia, jakie wartości przybiera funkcja $\sim(p \wedge \sim q)$ dla kolejnych podstawień.

p	q	$\sim(p\wedge \sim q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

`TI*`

Tabelki te mają identyczną zawartość, co znaczy, że charakteryzowane przez nie funkcje są identyczne, a różnią się jedynie sposobem wysłowienia.[2] Różnica w sposobie wysłowienia polega na tym, że co wyraża się w jednej strzałką implikacji, w drugiej wyraża się za pomocą pewnego układu funktorów koniunkcji i negacji.

Podobnie, jak w przypadku alternatywy, powstaje pytanie, czy analogiczna odpowiedniość w języku polskim zachodzi dla tego spójnika, który wybierzemy jako odpowiednik funktora implikacji. Do roli tej, jak zobaczymy, nadaje się spójnik służący do budowy **zdań warunkowych**, mianowicie:

jeśli p to q.

Zamiennie z nim można używać zwrotów:

gdy p, to q
zawsze, gdy p, to q
o ile p, to q
to, że p pociąga to, że q

i tym podobnych.

Istotnie, łatwo tu o przykłady potocznych polskich odpowiedników tej równoważności, która zachodzi między funkcją $p \Rightarrow q$ z tabelki `TI` a funkcją $\sim(p \wedge \sim q)$ z tabelki `TI*`. Można znaleźć sporo takich, które dobrze wpadają w ucho jako obiegowe przysłowia. *Nie ma róży bez kolców* podpada pod koniunkcyjną formę `TI*`, a nikt nie ma wątpliwości, że znaczy dokładnie to samo, co powiedzenie w formie implikacyjnej *jeśli jest róża, to są (w niej) kolce*. Podobnie zachowuje się fraza *nie ma dymu bez ognia*.

Ten stosunek zachodzący między formą implikacyjną a formą negacyjno-koniunkcyjną dostarcza metody obalania twierdzeń mających formę zdania warunkowego czyli implikacji. Aby zaprzeczyć poglądowi *która krowa dużo ryczy, mało mleka daje* (tzn., jeśli ryczy, to daje mało mleka), trzeba pokazać krowę, która dużo ryczy, ale daje też dużo mleka. Inny przykład. Pewien ostrożny kupiec kieruje się ściśle zasadą, by nie zaciągać kredytów, a uzasadnia to poglądem, że branie kredytów niechybnie pociąga bankructwo. Co, oczywiście, równoznaczne jest z twierdzeniem, że kto zaciąga kredyty, ten bankrutuje. Jak go przekonać, że nie jest to prawdą? Trzeba wskazać na przypadki, w których wzięto kredyt, a nie nastąpiło bankructwo.[3]

Jest jeszcze jeden, ważny dla analizy rozumowań, sposób formułowania zdania warunkowego. Zgodnie z przydawką, zdanie takie mówi o tym, jak pewien stan rzeczy warunkuje inny. Aby to zadawalająco opisać, nazwijmy pierwszy człon implikacji jej **poprzednikiem**, a drugi **następnikiem**. Każdy z tych członów mówi coś o warunkowaniu drugiego, w każdym jednak przypadku chodzi o inny rodzaj warunku (warunkowane są, właściwie, stany rzeczy, których dotyczą te zdania, ale dla skrótu mówimy o warunkowaniu poprzednika przez następnik i następnika przez poprzednik).

Oto zasada określająca ów stosunek. Poprzednik wyraża **warunek dostateczny** (zwany też *wystarczającym*) względem następnika, zaś następnik wyraża **warunek konieczny** (zwany też

[2] Analogiczny sposób porównywania tabelek można było zastosować w poprzednim odcinku, dotyczącym alternatywy.

[3] Struktura zdań podawanych wyżej jako przykłady cechuje się nie tylko tym, że są to (jawnie lub domyślnie) zdania warunkowe, ale także tym, że są to zdania ogólne.

niezbędnym) względem poprzednika. Na przykład, implikacja *każda osoba prawna ma zdolność do czynności prawnych* (inaczej: „zawsze jeśli jest się osobą prawną, to ma się zdolność ...” itd.) stwierdza, że wystarczy, czyli jest warunkiem dostatecznym, być osobą prawną, by mieć wymienioną zdolność. Nie jest to natomiast konieczne, bo tę samą zdolność mają niektóre osoby fizyczne. Z drugiej strony, dla osoby prawnej niezbędne jest posiadanie owej zdolności, bo bez niej nie byłaby ona osobą prawną; jest więc cecha ta warunkiem koniecznym.[4]

To, że stan rzeczy A jest warunkiem wystarczającym dla B, można wyrazić (dobitniej niż przez „jeśli”) za pomocą spójnika „zawsze wtedy, gdy”, powiadając *zawsze wtedy, gdy A, to B*. To zaś, że B jest warunkiem koniecznym dla A, można wyrazić za pomocą spójnika „tylko wtedy, gdy”, powiadając *B tylko wtedy, gdy A*. Na przykład, gdy się mówi „nie ma dymu bez ognia”, chce się powiedzieć, że dla dymu konieczny jest ogień, czyli że dym jest *tylko wtedy gdy* ogień; to zaś jest jednym ze sposobów wyrażenia implikacji „jeśli jest dym, to jest (tamże) ogień”, czyli, „*zawsze wtedy gdy* jest dym, to jest ogień”.

Gdy teraz połączymy oba te spójniki w jeden złożony, powiadając *A zawsze wtedy i tylko wtedy, gdy B* lub krócej (opuszczając „zawsze” jako domyślne)

A wtedy i tylko wtedy, gdy B,

to stwierdzamy, że A jest warunkiem koniecznym i zarazem wystarczającym dla B, co oczywiście pociąga za sobą, że i B jest takim podwójnym warunkiem dla A. Zachodzi tu więc koniunkcja dwóch implikacji tym się różniących, że zdanie będące w jednej poprzednikiem w drugiej jest następnikiem i odwrotnie.

Ta funkcja prawdziwościowa jest określana jako **obustronna implikacja** czyli **równoważność**. Oznaczamy ją symbolem $\Leftrightarrow$ który swym kształtem wskazuje na zachodzenie implikacji w obu kierunkach.

Nim zajmiemy się systematycznie, w rozdziale VI, zagadnieniami definicji, jest tu stosowne miejsce na antycypowanie punktu dotyczącego zastosowania naszego symbolu $\Leftrightarrow$ w definicjach. W zależności od kategorii składniowej (por. II.1.1) wyrażenia definiowanego, definicja ma bądź postać zdania, w którym symbol równości (lub wyrażenie o podobnej funkcji) łączy dwie nazwy, bądź postać zdania, w którym symbol równoważności łączy dwa zdania.

Przykład pierwszej postaci: $1 =_{df}$ nast(0) (jedność definiujemy jako następnik zera);

Przykład drugiej postaci: $(x = y - z) \Leftrightarrow_{df} (y = x + z)$ (definicja odejmowania za pomocą symbolu dodawania).

Następujący po symbolu równości lub równoważności indeks „df” wskazuje, że dane zdanie pełni rolę definicji. Bywa, że mamy dwa zdania o tym samym kształcie, lecz tym się różniące, że jedno z nich jest w pewnej teorii definicją, a drugie, w innej teorii, funkcji tej nie pełni. Ze względu na identyczność kształtu łatwo jest je pomylić, za co płaci się pogmatwaniem dalszego ciągu myśli. Można jednak tej szkodzie zapobiec, jeśli ów szczególny przypadek równoważności, jakim jest równoważność definicyjna, odróżnimy od przypadku ogólnego za pomocą owego indeksu. Analogicznie odróżniamy dwie wersje symbolu równości.

Symbol równoważności nie jest konieczny, bo cokolwiek wyrażamy za jego pomocą, możemy równie dobrze wyrazić posługując się koniunkcją odpowiednich implikacji. Tak, na przykład, zdanie: *„grzmi $\Leftrightarrow$ błyska”* jest równoznaczne ze zdaniem „(*grzmi* $\Rightarrow$ *błyska* $\wedge$ (*błyska* $\Rightarrow$ *grzmi*)”. Tę zamienność równoważności na koniunkcję dwóch implikacji stwierdza następująca definicja:

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow_{df} ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)).$$

Funktor równoważności jest wysoce przydatny, choć dysponując implikacją i koniunkcją możemy się bezeń obejść, bo nie tylko skraca on napisy, ale czyni je też przejrzystszymi.

[4] Relacji między warunkami koniecznym i dostatecznym nie należy mylić ze stosunkiem przyczynowym, które jest o tyle bogatszy, że zawiera odniesienie do czasu, do pewnych zależności fizycznych itp. Toteż nie ma w tym nic osobliwego, że czasem warunek dostateczny następuje czasowo po koniecznym; np. jest konieczne mieć maturę, by zostać przyjętym na studia wyższe, a więc wystarcza być studentem, by posiadać maturę.

Łatwo pokazać, że zdefiniowanie równoważności jako koniunkcji dwu implikacji pociąga za sobą charakterystykę równoważności przez następującą tabelkę.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

TR

3.3. Algebraiczne podstawy rachunku zdań. Funkcja prawdziwościowa — przypomnijmy — jest to funkcja, której wartości, jak i argumenty czerpane są z dwuelementowego zbioru wartości logicznych. Każda z poznanych dotychczas funkcji w swoisty, sobie właściwy sposób, przyporządkowuje wartościom argumentów wartości funkcji, np. równoważność argumentom o wartościach 1 i 1 przyporządkowuje wartość 1, argumentom o wartościach 0 i 1 wartość 0, itd.

Skąd bierzemy nasz repertuar funkcji prawdziwościowych? Czy jest to przypadek, że braliśmy ich dotąd pod uwagę pięć, czy jest w tym jakaś metoda? Żeby wyjaśnić metodę prowadzącą do wyboru naszych funkcji prawdziwościowych, trzeba odwołać się do ważnego rozdziału z dziejów nauki, jakim było powstanie algebry abstrakcyjnej. Początki algebry sięgają 16go i 17go wieku (wielkie zasługi dla jej rozwoju położył Kartezjusz), ale jej postać abstrakcyjna, ściśle związana z powstaniem współczesnej logiki, ukształtowała się w wieku 19tym. Abstrakcyjność jej polega na tym, że operacje (inaczej, funkcje) algebraiczne nie są ograniczone do liczb (jak to czyniono we wcześniejszej algebrze), lecz są definiowane dla obiektów dowolnego rodzaju; o tych obiektach wiemy tylko tyle, ile zostało podane w definicjach operacji; są to, mianowicie, te i tylko te przedmioty, na których owe operacje dają się wykonać. W zależności od tego, jak zdefiniujemy operacje, czyli jakie przypiszemy im własności, powstają różne teorie algebraiczne.

Jedna z takich teorii znajduje się u podstaw rachunku zdań. Nazywa się ona algebrą Boole'a od jej twórcy, którym był matematyk brytyjski George Boole (1815–1864). Przyjmuje się w niej, że zbiór przedmiotów, na których wykonalme są operacje jest dwuelementowy, niczego nie zakładając (zgodnie z abstrakcyjną naturą algebry) o tym, co to są za przedmioty. Jako operacje wykonalne na jej elementach przyjmuje się takie, które odpowiadają przedstawionym wyżej tabelom TN, TK i TA, ale — pamiętajmy — na tym wyjściowym etapie, nie są to tabele mówiące o wartościach logicznych i działaniach na tych wartościach.[5]

Tak więc, dwuelementowy zbiór i trzy wymienione operacje charakteryzują jednoznacznie algebrę Boole'a, stąd nazywa się je operacjami boolowskimi.[6] Łatwo zauważyć, że tego rodzaju operacji da się zdefiniować więcej. Np. wśród operacji jednoargumentowych można sobie wyobrazić jeszcze taką, która zachowuje ten sam obiekt, czyli 1 przekształca w 1, zaś 0 w 0. Ile jest wszystkich funkcji, można obliczyć kombinując wszystkie możliwe zestawienia zer i jedynek. Wynik tych operacji kombinatorycznych podają poniższe tabele: T1 dla funkcji jednoargumentowych, a T2 dla funkcji dwuargumentowych.

x	A	B	C	D
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

T1

[5] Odniesienie do wartości logicznych zachodzi dopiero na etapie zastosowań, od którego *de facto* zaczęliśmy nasze rozważania, ale który *de iure* (czyli z racji powinności) jest późniejszy w porządku teoretycznym.

[6] Zrobiły one karierę nie tylko w logice, lecz także w informatyce, gdzie znajdują zastosowanie zarówno w projektowaniu układów w sieciach elektrycznych, jak i strukturze języków programowania.

Liczba wszystkich możliwych funktorów dwu argumentowych przy dwu wartościach funkcji wynosi 16. Poniższa tabela — T2 — nie tylko podaje ten wynik, ale pozwala też prześledzić metodę, która do niego prowadzi.

x y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1 1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1 0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0 1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0 0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

W tym punkcie widać swobodę, jaką mamy przy tworzeniu systemu logicznego. Po pierwsze, nadajemy nic nie mówiącym symbolom taką lub inną interpretację. Dla celów np. techniki elektronicznej oraz informatyki interpretuje się funkcje opisane w powyższych tabelach jako schematy połączeń sieciowych, dla celów neurofizjologii jako schematy w sieciach nerwowych, a dla celów klasycznego rachunku zdań — jako funkcje do obliczania wartości logicznych zdań złożonych. Widać z tego, dzięki czemu rozważana obecnie teoria zasługuje na miano rachunku zdań (dlaczego nazywa się rachunkiem klasycznym, była mowa w odcinku „Tło historyczne”).[7]

Jeśli nawet nie każda z dwudziestu powyższych funkcji może być wykorzystana w naszym rachunku (są takie, którym trudno nadać intuicyjne znaczenie), to niektóre z nich na pewno się do tego nadają, a jest ich więcej niż to uwzględniono w obecnych rozważaniach. Na przykład, funkcja scharakteryzowana w kolumnie 15 odpowiada spójnikowi „ani ... ani ...” i mogłaby się przydać do zdefiniowania koniunkcji i negacji, ponieważ obie w sobie zawiera. Istotnie, są systemy (np. W. V. O. Quine’a), które posługują się tym funktorem (a raczej jego symbolicznym odpowiednikiem), ponieważ są po temu pewne racje teoretyczne. Jeśli natomiast tworzy się system logiki bardziej dla celów praktycznych niż teoretycznych, należy wybrać te funkcje, które najczęściej się pojawiają w rozumowaniach, o ile tylko inne dadzą się, w razie potrzeby, zdefiniować za ich pomocą.

W przyjętym tu zestawie pięciu funkcji, najbardziej dla naszych celów praktycznym, są takie pary, że za ich pomocą można zdefiniować pozostałe. Było już pokazane, jak przez koniunkcję z negacją można wyrazić alternatywę i jak implikację; z kolei, równoważność da się zdefiniować przez koniunkcję z implikacją. Można pokazać, że koniunkcja z negacją wystarczają do zdefiniowania nie tylko tych wybranych tu funkcji, ale także i pozostałych wyliczonych w T2. Tę samą zdolność mają pary (z naszego zestawu): alternatywa z negacją oraz implikacja z negacją; można np. zdefiniować za pomocą każdej z nich koniunkcję, można zdefiniować implikację za pomocą alternatywy z negacją, itd. Są to związki, które rzucają światło na sens odpowiadających danym funktorom spójników języka naturalnego.

4. Skąd niezawodność wnioskowania?

4.1. Algorytm zerojedynkowy dla praw logiki. Pojęcie algorytmu, choć etymologią sięga arabskiego średniowiecza, objawiło swą doniosłość dzięki współczesnej logice. Jej historycznym osiągnięciem jest udowodnienie, że nie wszystkie zagadnienia są rozstrzygalne, nawet gdy idzie o zagadnienia matematyczne; tym bardziej należy to odnieść do problemów nauk empirycznych, a w szczególności humanistyki. Mówimy o jakimś zagadnieniu, że jest **nierozstrzygalne**, gdy nie istnieje dlań metoda rozwiązania zwana algorytmem.

Algorytm jest to zbiór przepisów określających porządek działań, które należy wykonać, by rozwiązać zadanie z określonej klasy problemów. Algorytm ustala precyzyjnie obiekty, na których mają być wykonywane działania oraz określa wyniki tych działań; wyniki te są przyporządkowane

[7] Widać też, na czym polega abstrakcyjny charakter algebry, która niczego nie przesądzając o treści operacji, umożliwia przez to różnorodne interpretacje i zastosowania.

jednoznacznie do obiektów działania czyli jego argumentów, mamy tu więc do czynienia z funkcjami.

Autorzy próbujący uprzystępnić to pojęcie zwykli wskazywać na przepisy kulinarne jako na przykłady algorytmów. Istotnie, niektóre wskazówki, gdy są ujęte ilościowo (przygotować 1 kg. węgorza, jedną cytrynę itd.) lub gdy wymieniają bardzo konkretne czynności (zdjąć skórę, pokrajać na kawałki 6–8cm.), przypominają algorytmy obiektywnością i precyzją opisu. Ale gdy przepis kończy się zaleceniem „dodać soli i pieprzu do smaku” to mamy tu typowy przypadek problemu, który nie jest podatny na obiektywne rozstrzygnięcie (zresztą, sztuka kulinarna nie byłaby sztuką, gdyby wszystko załatwiały w niej algorytmy). Rozwiązanie otrzymane na drodze intuicyjnej, np. owego smaku, może być trafne (co pokazuje się nieraz po wyniku), ale pożądane jest, by tam gdzie to możliwe dysponować jakimś algorytmem. Eliminuje to bowiem ryzyko błędu i zarazem odciąża siły twórcze, które można wtedy lepiej skoncentrować na wymagającym tego odcinku. Dobrze jest więc, gdy w jakimś postępowaniu, na tyle skomplikowanym, że nie obejdzie się bez pomysłowości czy intuicji, pewne partie mogą być wykonane na podstawie algorytmów. Tak właśnie jest ze sztuką kulinarną. I tak ze sztuką rozumowania. Gdy idzie o tę drugą, zajmiemy się obecnie jej częścią algorytmiczną.

Algorytm zwany **zerojedynkowym** bierze tę nazwę od obiektów, na których jest wykonywany, owych zer i jedynek z tabel prawdziwościowych. Klasa problemów, do których rozwiązywania został stworzony wyraża się pytaniem: *czy dana formuła rachunku zdań jest prawem logiki?* Być **prawem logicznym rachunku zdań** — to być taką formułą zbudowaną ze zmiennych zdaniowych i funktorów prawdziwościowych, która jest prawdziwa przy każdym podstawieniu za zmienne.

Weźmy możliwie najprostszy przykład: formuła $p \Rightarrow p$ daje zdanie prawdziwe, cokolwiek by nie podstawić za p, czy będzie to prawda czy fałsz, np. $x = x$ lub $x \neq x$. Podobnie widać z miejsca, że każde podstawienie musi zaowocować zdaniem prawdziwym, gdy idzie o formuły takie $p \vee \sim p$ czy $\sim (q \wedge \sim q)$. Z drugiej strony, jest oczywiste, że np. koniunkcja $p \wedge q$ nie jest prawem logicznym, bo z samej definicji (tj. z tabelki dla koniunkcji) widać, że istnieją podstawienia falsyfikujące, czyli czyniące formułę zdaniem fałszywym.

Ale przy formułach bardziej złożonych rozwiązanie wymaga namysłu. Wtedy tu przychodzi z pomocą algorytm zerojedynkowy. Prześledźmy go na przykładzie formuły:

(4.1). A $\quad (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q).$

Trzeba wykonać kolejno cztery podstawienia, bo tyle jest kombinacji tworzących różne układy z zera i jedynki. Kompletną listę takich podstawień dogodnie jest przedstawić w tabelce, której pierwsza kolumna podaje podstawienia za p, druga podstawienia za q, zaś trzecia wynik danego podstawienia (tj. z danego wiersza), który odpowiada na pytanie, jaka jest przy tych podstawieniach wartość logiczna formuły (4.1).A.

p	q	(4.1).A
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	—

Do wyników zarejestrowanych w powyższej tabelce prowadzą następujące obliczenia. Wynik w wierszu pierwszym powstaje kolejno z podstawienia wartości 1 za p i 1 za q (krok 1), potem równoczesnego zastosowania tabelki $\mathbb{TI}$ do poprzednika i $\mathbb{TN}$ do następnika (krok 2), potem zastosowania tabelki $\mathbb{TI}$ do następnika (krok 3), wreszcie zastosowania tejże tabelki do rezultatu kroku trzeciego (krok 4).

(4.1). 1 $\quad (1 \Rightarrow 1) \Rightarrow (\sim 1 \Rightarrow \sim 1)$

(4.1). 2 $\quad 1 \Rightarrow (0 \Rightarrow 0)$

(4.1). 3 $\quad 1 \Rightarrow 1$

(4.1). 4 $\quad 1$

Procedurę tę powtarzamy dla następnych wierszy z listy dotyczącej (4.1).A, co prowadzi do wyników wpisanych w trzeciej kolumnie tej listy. Na wierszu trzecim kończymy postępowanie (co symbolizuje nie wypełniony wiersz czwarty), bo skoro istnieje choćby jedno podstawienie, przy którym formuła przybiera wartość 0, to nie jest ona prawem logiki. Mamy więc już wynik, tym razem negatywny, i na tym kończymy postępowanie.

Godna polecenia jest skrótowa metoda zerojedynkowa, która pozwala odrazu (bez pedantycznego wypełniania kolejnych wierszy) wpaść na trop krytycznego (w tym przykładzie) wiersza trzeciego. Czynimy założenie, że formuła A nie jest prawem logiki, wobec czego (przyjmujemy konsekwencję tego założenia) ma prawdziwy poprzednik i fałszywy następnik. Aby następnik był fałszywy, to — sam będąc implikacją — musi mieć prawdziwy poprzednik $\sim p$ i fałszywy następnik $\sim q$. Skoro $\sim p$ jest prawdą, to p jest fałszem, a skoro $\sim q$ jest fałszem, to q jest prawdą. I tak znajdujemy podstawienie falsyfikujące formułę A.

Ta sama metoda pozwala na uzyskanie odpowiedzi pozytywnej, gdy formuła jest prawem logiki. Rozważmy formułę:

(4.1). B $\quad (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p).$

Załóżmy, że B nie jest prawem logiki. Wtedy ma prawdziwy poprzednik i fałszywy następnik. Ten z kolei, będąc fałszywą implikacją, ma prawdziwy poprzednik $\sim q$ i fałszywy następnik $\sim p$, z czego wynika, że q jest fałszywe, a p prawdziwe. Ale przy tych wartościach dla p i q, poprzednik formuły B staje się fałszywy, co jest sprzeczne z pierwszym wnioskiem, który wysnuliśmy z naszego założenia o fałszywości B: że poprzednik jest prawdziwy.

Zdanie, z którego wynikają dwa sprzeczne między sobą wnioski musi być zdaniem fałszywym, ponieważ prowadzi do sprzeczności, a sprzeczność, będąc fałszem, nie może wynikać ze zdania prawdziwego. Zatem założenie wyjściowe jest fałszywe; a że głosi ono, iż B nie jest prawem logiki, to prawdą będzie jego zaprzeczenie, czyli to, że B jest prawem logiki.

Ten rodzaj rozumowania nazywa się sprowadzeniem do sprzeczności lub **sprowadzeniem do niedorzeczności**, co jest odpowiednikiem łacińskiego *reductio ad absurdum*. Oprócz tej wersji algorytmu zerojedynkowego i jego wersji podstawowej istnieją jeszcze inne metody badania, czy dana formuła jest prawem rachunku zdań. Jedna z nich, zwana sprowadzaniem do postaci normalnej ma także charakter algorytmiczny; jej przedstawienie nie mieści się w ramach obecnego tekstu, ale wymieniwszy jej nazwę można odesłać do odpowiedniej literatury, jak Borkowski [1970], Grzegorczyk [1969], ELF, III, 3.

Rachunek zdań jest też konstruowany w postaci systemu aksjomatycznego, co nie dostarcza algorytmu, ale daje pożyteczne uporządkowanie twierdzeń. Polega ono na tym, że pewne prawa logiki przyjmuje się jako pierwotne, to jest bez dowodu; nazywają się one **aksjomatami**. Ponadto, przyjmuje się reguły wyprowadzania jednych twierdzeń z innych, zwane **regułami wnioskowania**, i za pomocą tych reguł wyprowadza się z aksjomatów interesujące nas prawa logiki; są one wtedy twierdzeniami danego systemu aksjomatycznego. Procedura ta jest opisana, w odniesieniu do logiki predykatów, na początku rozdziału piątego. Różne przykłady aksjomatyzacji rachunku zdań znajdują się w literaturze podanej wyżej (w kontekście wzmianki o postaciach normalnych).

4.2. Wynikanie logiczne a wnioskowanie. Poprzez pojęcie funkcji prawdziwościowej dochodzi się do pojęcia **prawa logiki zdań** – jako takiej funkcji, która przy każdej wartości argumentów przybiera wartość prawdy. Prawo logiki zdań określa się też terminem **tautologia logiki zdań**; ma on tę dogodność, że łatwo odeń utworzyć termin abstrakcyjny „tautologiczność” jako nazwę cechy charakteryzującej tautologie czyli prawa logiki.

Pojęcie prawa służy z kolei do tego, by wprowadzić pojęcie wynikania logicznego, a za jego pomocą wyrazić kryterium poprawnego wnioskowania dedukcyjnego. Wnioskowanie takie określamy (krócej) jako **niezawodne**, to jest ukształtowane według schematu, który zapewnia, że o ile przesłanki wnioskowania są prawdziwe, to i wniosek jest prawdziwy.[8]

Stosunek między prawem logiki a niezawodnym schematem wnioskowania jest następujący. Bierzemy pod uwagę te prawa logiki, które mają formę implikacji, a więc składają się z poprzednika i następnika.

Zamiast mówić, że formuła *N* jest następnikiem, a formuła *P* poprzednikiem jakiegoś prawa logiki, możemy mówić (krócej), że

N **wynika logicznie** *z P*.

Określenie to dotyczy również zdań będących podstawieniami odpowiednich formuł. Rozważmy formułę $p \vee q$, która wynika logicznie z formuły $p \wedge q$, ponieważ obowiązuje następujące prawo (co można sprawdzić metodą zerojedynkową):

$$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q).$$

Każde zdanie, które powstaje z podstawień dokonanych w następniku tego prawa wynika logicznie z odpowiednich podstawień dokonanych w jego poprzedniku. Np. ze zdania „jestem zdrowy i jestem bogaty" wynika logicznie zdanie „jestem zdrowy lub jestem bogaty" (wynikanie odwrotne nie zachodzi, co można sprawdzić zerojedynkowo).

Na **wnioskowanie** składają się przesłanki (jedna lub więcej) i wniosek. **Przesłanki** to te zdania, które uznajemy za prawdziwe i na ich podstawie wykazujemy prawdziwość **wniosku**. Podaną wyżej definicję wnioskowania niezawodnego, jako gwarantującego prawdziwość wniosku przy prawdziwości przesłanek, potrafimy obecnie wyposażyć w efektywne, bo oparte na algorytmie zerojedynkowym, kryterium niezawodności. Mianowicie wnioskowanie jest **niezawodne** wtedy i tylko wtedy, gdy jego *wniosek wynika logicznie z przesłanek*; to znaczy, przesłanki stanowią poprzednik, a wniosek następnik w stosownym podstawieniu jakiegoś prawa logiki.

Prześledźmy na konkretnym przykładzie, jak funkcjonuje to kryterium niezawodności wnioskowania. Niech przesłanką będzie zdanie, które wypowiedział w średniowieczu pewien filozof o innym, uczeń o swym mistrzu, że ów *mistrz wiedział wszystko o świecie* (zdanie *w*), gdyż *znał matematykę* (zdanie *m*) i *znał fizykę* (zdanie *f*).

Przypuśćmy, że czytając ten tekst, (brzmiący w oryginale *potuit scire omnia quia scivit mathematicam et perspectivam*), ktoś dochodzi do wniosku, że gdyby nie było prawdą, że Robert wiedział wszystko o Kosmosie to nie byłoby prawdą przynajmniej jedno z dwojga: albo to, że znał matematykę, albo to że znał fizykę. W tym wnioskowaniu przesłanka ma formę zdania warunkowego, w którym warunek wystarczający jest wyrażany przez „ponieważ", mianowicie:

(4.2). 1 $\quad (m \wedge f) \Rightarrow w.$

Wniosek jest także implikacją (utworzoną przez spójnik „gdyby") mianowicie:

(4.2). 2 $\quad \sim w \Rightarrow (\sim m \vee \sim f).$

Czy jest to wnioskowanie poprawne? Jest, o ile jego schemat jest niezawodny. Czy jest niezawodny? Jest, o ile wniosek wynika logicznie z przesłanek. Czy wynika? Tak! Bo jego przesłanka jest poprzednikiem, a wniosek jest następnikiem w odpowiednim podstawieniu prawa logiki. Zapiszmy to prawo (traktując nasze litery mnemotechniczne jako symbole formuł składowych), jak następuje:

(4.2). 3 $\quad ((m \wedge f) \Rightarrow w) \Rightarrow (\sim w \Rightarrow (\sim m \vee \sim f)).$

To, że formuła (4.2).3 jest tautologią łatwo wykazać, posługując się algorytmem zerojedynkowym; ze względu na wielość kombinacji podstawień opłacalne jest tu zastosowanie metody skrótowej (przy trzech zmiennych i podstawianiu za każdą jednej z dwóch wartości jest tych podstawień 2^3).

[8] Nie wszystkie wnioskowania uprawiane w nauce mają tę właściwość, pozbawione są jej np. wnioskowania statystyczne; nie są one jednak przedmiotem logiki formalnej, tzn. teorii, której trzon stanowią rachunek zdań i logika predykatów. W sprawie wnioskowań statystycznych zob. MEL (art. pod tym tytułem) i ELF, XLV.

Schematy wnioskowania zapisujemy w ten sposób, że oddzielamy wniosek od przesłanki (przesłanek) poziomą kreską albo, pisząc w jednej linii, oddzielamy wniosek trzema kropkami. Chcąc wyrazić, że jest to schemat ogólny, nie zaś taki, który opisuje jakieś konkretne wnioskowanie, używamy specjalnych umownych oznaczeń dla formuł; niech będą to (jak się często stosuje) wybrane do tego celu litery greckie.

Oto schemat wnioskowania, którego niezawodność jest zagwarantowana tym, że formuła reprezentowana przykładowo przez (4.2).3 jest tautologią.

(4.2). 4 $((\varphi \wedge \phi) \Rightarrow \psi)\ zatem\ (\sim \psi \Rightarrow (\sim \varphi \vee \sim \phi)).$

Pod ten sam schemat wnioskowania podpada takie np. rozumowanie. *Jeśli zna się teorię wnioskowania i teorię definicji, to zna się całą logikę. A zatem, jeśli się nie zna całej logiki, to nie zna się teorii wnioskowania lub nie zna się teorii definicji.* Słowo „a zatem" (lub jakiś jego synonim) stanowi w języku polskim odpowiednik symbolu wyrażającego uznanie prawdziwości wniosku na podstawie uznania prawdziwości przesłanek.

Gdy zdarzy się nam rozumować w taki sposób, który nie znajduje usprawiedliwienia w jakimś niezawodnym schemacie wnioskowania, do wykrycia tego faktu służy to samo kryterium. Znajdujemy najpierw schemat dla naszego wnioskowania, przekształcamy go następnie na odpowiadającą mu formułę o postaci implikacji, wreszcie badamy, czy ta formuła jest prawem logiki. Dla rozumowań dających się wyrazić w rachunku zdań, skutecznie w każdym przypadku rozstrzyga kwestię algorytm zerojedynkowy.

Postawmy np. pytanie, czy poprawne będzie wnioskowanie, którego schemat odpowiada następującej formule:

(4.2). 5 $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow ((\sim p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim r).$

Posługując się skrótową metodą zerojedynkową, szybko wykryjemy, że formuła ta jest falsyfikowana przez podstawienie zer za p i q oraz podstawienie jedynki za r. Istnieją więc podstawienia, przy których formuła ta staje się fałszywa, a zatem nie jest ona prawem logiki. By ukonkretnić ten wynik, można rozważyć podstawienia konkretnych zdań, np. te, które się złożą na następujące wnioskowanie. *Jeśli każdy (człowiek) ma 5 metrów wzrostu i każdy waży tonę, to istnieją ciała o masie tony. A zatem jeśli nie każdy ma 5 metrów wzrostu i nie każdy waży tonę, to nie istnieją ciała o masie tony.* Tego rodzaju przykład, służący do wykazania, że dana formuła nie jest spełniona dla wszelkich podstawień określamy mianem **kontrprzykładu**.

Rachunek zdań nie wyczerpuje całego bogactwa sposobów rozumowania, ani tych, które ogarnia teoria logiczna, ani tych, które zawdzięczamy naszej naturalnej logice. O tych innych będzie mowa w następnych rozdziałach.