Rachunek Predykatów
słownik, składnia i semantyka

Tło historyczne. Predykat to w gramatyce logicznej najbliższy odpowiednik tego, co tradycyjna gramatyka języka naturalnego nazywa orzeczeniem.[1] Zgodność ta zachodzi tylko do pewnego punktu, ale nim poznamy różnice, skorzystajmy z pouczającej analogii. Polega ona na tym, że każdy predykat określa pewien **zbiór** przedmiotów — tych mianowicie, o których da się go prawdziwie orzec. To samo odnosi się do orzeczenia (na co wskazuje użyty przed chwilą termin „orzec"), stąd wspomniana analogia. I tak, predykat „okrąża słońce" określa zbiór ciał okrążających słońce czyli planet, ponieważ orzeka się go prawdziwie o planetach. Predykat „śpi" określa zbiór śpiących, „jest wesoły" określa zbiór wesołych itd. Zamiast „określa" mówi się też, bardziej technicznie, „denotuje", a dany nazywa się **denotacją predykatu** lub **zakresem predykatu**.

Zbiory, nazyane też **klasami** są tym, z czym nieustannie mamy do czynienia i w zmysłowym postrzeganiu świata i w abstrakcyjnym na jego temat myśleniu.[2] Idąc, powiedzmy, lasem, postrzegam drzewa, a więc elementy pewnej klasy zawartej w klasie tworów przyrody. Gdy wyróżniam wśród nich brzozy, dęby, świerki itd., to znowu mam na uwadze klasy; tym razem takie, które są zawarte w klasie drzew czyli są jej podzbiorami. Mamy też do czynienia ze zbiorami obiektów abstrakcyjnych jak liczby czy cechy (np. zbiór kolorów). Przedmiotami abstrakcyjnymi są także zbiory i nic nie preszkadza, by łączyć je w zbiory zbiorów; gdy traktujemy np. parlament jako zbiór posłów, to zbiór parlamentów jest pewnym zbiorem zbiorów.

Pomimo naturalności i wszechobecności idei zbioru, upłynęły wieki nim w dziejach logiki doczekała się wysłowienia w stosownej terminologii. Wprawdzie kiełkowała ona już w średniowiecznej i późniejszej sylogistyce, wyraziście doszła do głosu w algebrze Boole'a, ale pełne prawo obywatelstwa zyskała w logice i matematyce za sprawą twórcy teorii zbiorów, którym był Georg Cantor (1845-1918). Teoria zbiorów jest też nazywana teorią mnogości (za Cantorem, na wzór niemieckiego *Mengenlehre*) i obejmuje, jako część najbardziej odkrywczą, wychodzącą daleko poza rozważania Boole'a, naukę o zbiorach nieskończonych.

Oparty na idei zbioru rachunek predykatów liczy sobie (w roku 2002) 123 lata. Można jego wiek określić tak dokładnie, bo pojawił się on gotowy wraz z rachunkiem zdań jako częścią podstawową, w dziele Gottloba Fregego wydanym w roku 1879. Nawiązuje ono tytułem do wcześniejszego o dwa wieki projektu Gottfrieda Wilhelma Leibniza (1646-1716), żeby stworzyć język oddający strukturą pojęciową prawa myślenia czystego, w więc, myślenia niezależnego od wpływu ukształtowanych historycznie, w pewnym stopniu przypadkowo, języków etnicznych. Wzorca ścisłości dostarczył język arytmetyki, co zaznaczono w tytule, który po polsku brzmiałby, jak następuje: „Pismo pojęciowe – symboliczny, utworzony na wzór arytmetyki, język czystego myślenia" (*Begriffsschrift – eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*).

---

[1] Termin „predykat" pochodzi od łacińskiego czasownika „praedicare", który znaczy „orzekać".

[2] W pewnych zaawansowanych teoriach matematycznych nie traktuje się terminów „zbiór" i „klasa" jako równoznacznych lecz przydziela się każdemu z nich inną rolę (por. ELF, XIII, 3). Ale gdy się nie nawiązuje do owych teorii, dogodniej jest trzymać się szeroko rozpowszechnionej praktyki językowej, która terminy te traktuje zamiennie, co daje m.in. pewne korzyści stylistyczne.

Dopóki nie było takiego języka, ludzie radzili sobie z większością rozumowań „na zdrowy rozum”, choć oficjalnie miała do tego służyć teoria logiczna zwana *sylogistyką*, stworzona około roku 350 przed Chr. przez Arystotelesa. Ale sylogistyka nie znała nazw indywiduowych ani predykatów wieloczłonowych czyli odnoszących się do więcej niż jednego obiektu. Z tego powodu była bezradna wobec wielu rodzajów rozumowań, między innymi w geometrii. W obrębie jednak rozumowań z predykatami jednoczłonowymi radziła sobie nieźle i dostarczyła wzorca ścisłości, który przeorał głęboko umysłowość europejską; bez niej trudno sobie wyobrazić powstanie logiki współczesnej, której w połowie wieku 19go torowało drogę algebraiczne ujęcie sylogistyki.

Rachunek predykatów występuje pod kilkoma nazwami. Nazywa się go także logiką predykatów, rachunkiem kwantyfikatorów, logiką kwantyfikatorów. Die ostatnie nazwy tym się tłumaczą, że w formułach rozważanej logiki występują oprócz predykatów wyrażenia zwane kwantyfikatorami, które mówią o tym, czy pojedynczy predykat lub jakaś bardziej złożona formuą odnosi do wszystkich czy do niektórych elementów obejmowanego danym wyrażeniem zbioru.

Konstrukcja rozdziału. Tematyka rachunku predykatów jest tu podzielona na dwa rozdziały. W obecnym rozważa się stosunek języka tego rachunku do rzeczywistości. której mają dotyczyć wnioskowania kierowane regułami logiki predykatów. Reguły te są omówione w rozdziale następnym. Rozdział obecny obejmuje rozważania nad tym, co zakłada się o świecie przez fakt takiej a nie innej konstrukcji języka teorii predykatów, a w szczególności jak wiąże się pojęcie predykatu z pojęciem zbioru (część 1). Potem następuje charakterystyka słownika i składni omawiająca budowę zdań atomowych i formuł zdaniowych oraz znaczenie kwantyfikatorów (część 2), wreszcie przedstawia się towarzyszącą teorii predykatów teorię identyczności (część 3).

1. Czego dotyczy język logiki predykatów

1.1. O niepustości dziedzin rządzonych prawami logiki. Nie jest prawdą, choć powiadali tak niektórzy, że logika jest o niczym. Że dostarcza *tylko* mechanizmu językowego do przetwarzania jednych zdań w inne — mechanizmu, który gwarantuje, że jeśli zdanie przetwarzane jest prawdziwe, to i zdanie zeń otrzymane jest prawdziwe. Logika rzeczywiście dostarcza takiego mechanizmu, ale nie ma powodu do owego ‘tylko’, którym forsuje się tezę, że za logiką nie stoi żaden pogląd, żadne widzenie świata, żaden wybór filozoficzny. A tak nie jest. I to z paru powodów, z których każdy potwierdza tezę o poznawczej roli logiki. Już odwołanie się do pojęcia prawdy czyni ów “nihilizm” niekonsekwentnym.[3] Prawda to zgodność sądu, lub wyrażającego ten sąd zdania, z rzeczywistością. Czy teoria logiczna może uchylić się od stanowiska wobec struktury rzeczywistości, a zarazem wykonać to zadanie, którym jest podanie metod wnioskowania niezawodnego? Niezawodnego, to znaczy dającego prawdziwy wniosek zawsze wtedy, gdy prawdziwe są przesłanki. Jak zobaczymy w dalszych punktach, nie jest to możliwe.

Przyjmuje się o prawach logiki, że są one prawdziwe w każdej niepustej dziedzinie, to znaczy takiej, w której istnieje przynajmniej jeden przedmiot. Potrzebujemy bowiem następujących praw logiki (por. rozdz. piąty, odc. 1.1).

A1. Jeśli φ (litera ta symbolizuje dowolne zdanie przyjętego języka) jest prawdą o każdym przedmiocie z danej dziedziny, to φ jest prawdą o pewnym określonym przedmiocie z tejże dziedziny.

A2. Jeśli φ jest prawdą o pewnym określonym przedmiocie z danej dziedziny, to istnieje w tej dziedzinie przedmiot, o którym jest prawdą φ.

[3] We wcześniejszej wersji (lata dwudzieste, Koło Wiedeńskie) definicja ta nie zawierała przy słowie ‘zdanie’ przymiotnika ‘prawdziwe’, lecz zwrot ‘uznane za tezę systemu’, co uchyla zarzut niekonsekwencji. Stawia za to przed zagadką, w jaki sposób logika unikająca pojęcia prawdy mogłaby dostarczyć metody wnioskowania, która gwarantuje, że ze zdania prawdziwego nie powstanie fałszywe. Toteż nikt nie postuluje obecnie rezygnacji z pojęcia prawdy w logice, a stało się to dzięki przełomowej pracy Tarskiego [1933]).

Wniosek uzyskany z tych dwóch przesłanek za pomocą reguły sylogizmu hipotetycznego będzie fałszywy w dziedzinie pustej, ponieważ jego poprzednik (zdanie ogólne) jest prawdziwy w tej dziedzinie, natomiast następnik jest w niej fałszywy. Dlaczego poprzednik jest prawdziwy? Oto np. zdanie *Każdy jest krasnalem* znaczy tyle, co *Nie ma nikogo, kto by nie był krasnalem*. Dziedzina pusta jest to taka, której elementy stanowią zbiór pusty; w zbiorze zaś pustym, czyli pozbawionym elementów, powyższe zdanie jest prawdziwe, bo skoro nie ma w tym zbiorze niczego, to nie ma też jakichkolwiek nie-krasnali. Przy tym prawdziwym poprzedniku oraz fałszywym następniku ('Istnieje przynajmniej jeden krasnal') całe zdanie warunkowe wynikające z przesłanek A1 i A2, mianowicie 'Jeśli każdy jest krasnalem, to istnieje przynajmniej jeden krasnal' jest zdaniem fałszywym. A ponieważ wynika ono z praw logiki (A1 i A2) oraz z supozycji, że prawa logiki są prawdziwe także w dziedzinie pustej, to trzeba odrzucić albo tę supozycję, albo przynajmniej jedno z powyższych praw. Skoro nie odrzucamy żadnego z nich, to pozostaje odrzucenie owej supozycji, a więc przyjęcie, że prawa logiki dotyczą dziedzin niepustych.

1.2. O strukturze świata wyznaczonej przez teorię predykatów. Gdy treść pewnych praw logiki pociąga powyższą tezę o niepustości, to z kolei sposób ich formułowania, biorący się z przyjętej składni, określa w pewien sposób strukturę dziedzin, do których stosuje się logikę; mówiąc swobodniej, wyznacza on strukturę rzeczywistości.[4]

Świat zbiorów jest to nieskończona hierarchia, u której podstawy znajdują się klasy indywiduów, np. klasa zwierząt, roślin, itd. potem idą zbiory takich klas indywiduów, np. zbiór pewnych gatunków zwierzęcych (gatunki są wszak klasami), powiedzmy Z, oraz zbiór pewnych gatunków roślinnych, powiedzmy R. Potem idą zbiory zbiorów klas indywiduów, np. zbiór utworzony z Z i R; i tak dalej, *ad infinitum*. Na początku mamy więc indywidua, którym w języku (o ile dane indywiduum jest nazwane) odpowiadają nazwy indywiduowe, np. imiona własne. Co to znaczy być indywiduum, nie da się powiedzieć w sposób ogólny niczego więcej, jak to, że indywiduum nie jest zbiorem. Da się natomiast lepiej powiedzieć, co to jest indywiduum w danej badanej dziedzinie. Tak więc indywiduami w dziedzinie arytmetyki są liczby, indywiduami w astronomii są ciała niebieskie, w zoologii zwierzęta, i tak dalej.

Predykat jest to wyrażenie, któremu jest zawsze przyporządkowany jakiś zbiór czyli klasa (jak powiedziano na wstępie, terminów tych będzie się używać zamiennie). Może to być jakaś klasa obiektów nie będących zbiorami, czyli klasa **indywiduów**, może to być klasa zbiorów, klasa zbiorów zbiorów itd. Tak więc, podstawę obrazu świata wyznaczonego przez teorię predykatów stanowią indywidua i zbiory.

Nie jest to jeszcze cały obraz świata, który jest nieodzowny w naszym myśleniu i potocznym i naukowym. W tym pełniejszym obrazie nie możemy się obejść bez cech i relacji. Na każdym wszak kroku mówimy, że coś jest jakieś, czyli ma pewną cechę (inaczej, własność), lub że coś pozostaje w takim to a takim stosunku (relacji) do czegoś. Poprzedni rozdział pokazał nieodzowność pojęcia relacji u samych podstaw logiki, kiedy to funkcje, m.in. prawdziwościowe definiuje się jako pewną odmianę relacji, mianowicie relacje jednoznaczne.

W dalszych rozważaniach, by uprościć wysłowienie przez pozbycie się zwrotu alternatywnego 'cechy lub relacje', będziemy traktować cechy jako rodzaj relacji, mianowicie relacje jednoczłonowe (inaczej, jednoargumentowe). Analogicznie jak relacja orzekana o dwóch podmiotach nazywa się dwuczłonową, tak własność, będąc orzekana o jednym, zasługuje na miano jednoczłonowej. Dlatego w tytule tego rozdziału mowa jest o indywiduach, zbiorach i relacjach, z włączeniem cech do kategorii relacji.

[4] Zależność tę ilustruje fakt, że pewni autorzy, kierując się motywami filozoficznymi, przyjmują systemy konkurencyjne względem teorii predykatów. Np. Tadeusz Kotarbiński (1886-1981), który głosił rodzaj materializmu nie dopuszczający istnienia zbiorów, posługiwał się pewną logiką alternatywną do teorii predykatów, zwaną ontologią Leśniewskiego.

Z czysto teoretycznego punktu widzenia, także wyodrębnianie relacji jest zbędne, ponieważ każdej relacji jest przyporządkowany jakiś zbiór, np. cesze (relacji jednoczłonowej) jaką jest zieleń jest przyporządkowany zbiór rzeczy zielonych, a relacji, jaką jest małżeństwo jest przyporządkowany zbiór par małżeńskich. Zauważmy, że w tym drugim przypadku elementami zbioru nie są pojedyncze przedmioty lecz ich pary, a więc zbiory dwuelementowe. I tak owa relacja okazuje się być zbiorem pewnych zbiorów, przez co samo pojęcie relacji można wyeliminować. Podobnie relacje trójczłonowe zredukuje się do zbiorów, których elementami są trójki przedmiotów, czyli zbiory trójelementowe, i tak dalej.

Tego rodzaju redukcja jest ważnym osiągnięciem teoretycznym, toteż będziemy z niej korzystać w odpowiednich punktach. Mając ją w ten sposób na uwadze, nie będziemy jednak rezygnować z terminów ‘cecha’ czy ‘relacja’, które są w pewnych kontekstach niezbędne, a przy tym tak wrosłe w nasze myślenie o świecie, że bez nich trudno by cokolwiek wysłowić.

2. Budowa języka logiki predykatów

2.1. Budowa zdań atomowych. Dzięki rachunkowi zdań, czyli logice funkcji prawdziwościowych, potrafimy analizować zdania złożone i ustalać reguły wnioskowania w zależności od rodzaju złożenia. Na tym jednak logika się nie kończy. Zdanie reprezentowane przez zmienną ma też jakąś wewnętrzną strukturę (od ktorej w rachunku zdań abstrahujemy), a od niej często zależy poprawność wnioskowania. Aby zdać sprawę z tej struktury, zaczynamy od wprowadzenia pojęcia zdania atomowego.

Posłużymy się w tym celu wziętym z tradycyjnej gramatyki pojęciem podmiotu, biorąc pod uwagę te przypadki, w których podmiotem jest imię własne, jak w zdaniu „Kleopatra jest zakochana”. Odrazu jednak pojęcie to rozszerzymy w taki sposób, żeby w zdaniu mógł być więcej niż jeden podmiot. I tak, w zdaniu „Kleopatra jest zakochana w Cezarze” podmiotami są „Kleopatra” i „Cezar”, a predykatem zwrot „jest zakochana w”. (Pouczającym ćwiczeniem będzie przypomnieć sobie, jak analizuje się takie zdania w tradycyjnej gramatyce wykładanej przez polonistów; odpowiedź znajduje się w przypisie do niniejszego nawiasu).[5]

Zachowując więc ideę predykatu wyrażoną w jego łacińskiej etymologii (*praedico* znaczy orzekam), uogólniamy pojęcie predykatu w taki sposób, że będące nim wyrażenie nadaje się do orzekania o więcej niż jednym podmiocie. A zatem, zdanie *Platon jest uczniem Sokratesa* orzeka o dwóch podmiotach, Platonie i Sokratesie: zdanie to orzeka zachodzenie relacji na tym polegającej, że pierwszy jest uczniem drugiego. Z takim rozumieniem predykatów łączy się ich klasyfikacja predykatów wedle tego, ile danemu predykatowi przysługuje członów zwanych, bardziej technicznie, **argumentami predykatu**. Mamy więc predykaty jedno-członowe (-argumentowe), dwu-członowe (-argumentowe) itd.

Gramatyka rachunku predykatów w jeszcze jednym punkcie różni się znacząco od gramatyki tradycyjnej (przyjętej za podstawę sylogistyki Arystotelesa), mianowicie dopuszcza w roli podmiotów czyli argumentów jedynie takie wyrażenia, które są nazwami przedmiotów jednostkowych. Typowe nazwy tego rodzaju to imiona własne. W logice przyjęło się dla nich określenie: **nazwy indywiduowe** (mawia się też „indywidualne”), Tak więc „Mount Everest” jest nazwą indywiduową Mount

[5] Wedle tradycyjnej gramatyki języka polskiego orzeczeniem jest tu reszta zdania poza podmiotem, a więc zwrot „jest zakochana w Cezarze”. Przy takim podziale gramatycznym znika z pola widzenia to, że mowa jest tu o pewnym stosunku między tymi dwiema postaciami, podobnie jak w zdaniu „jedność mniejsza jest od dwóch” czyli „$1 < 2$”, mowa jest o stosunku między dwiema liczbami. Wedle metody tradycyjnej zastosowanej do zdania o Kleopatrze i Cezarze, o zdaniu arytmetycznym trzeba by powiedzieć, że podmiotem jest „1” zaś orzeczeniem czyli predykatem „< 2”. W gramatyce logicznej „1” i „2” z tego zdania są równoprawnymi podmiotami, a dwuczłonowym (można rzec, dwupodmiotowym) predykatem jest „$<$”. Takie ujęcie jest potrzebne, żeby w badaniu poprawności rozumowań można było w pełni czynić użytek z kwantyfikatorów.

Everestu itd. W tradycyjnej gramatyce i tradycyjnej logice (sylogistyce) podmiotami mogą być także nazwy ogólne (gramatycy zwą je rzeczownikami pospolitymi, w odróżnieniu od imion własnych). Od zdania z nazwą ogólną w podmiocie do zdania istnieje, także w językach naturalnych, proste przejście do równoznacznego z nim zdania zgodnego z gramatyką logiki predykatów. Np. zdanie

Mędrzec nie jest gadatliwy.

przekształca się na okres warunkowy

Jeśli ktoś jest mędrcem, to [ten ktoś] nie jest gadatliwy.

gdzie podmiotem w poprzedniku i w następniku jest zaimek „ktoś" pełniący rolę symbolu zmiennego, czyli jakby pustego miejsca do wypełnienienia, które mażna wypełnić imieniem własnym, np.

Jeśli Salomon jest mędrcem, to nie jest gadatliwy.

Zdanie złożone z predykatu oraz tylu argumentów, ilu wymaga znaczenie danego predykatu określamy terminem: **zdanie atomowe**. Określenie to uzasadnia się faktem, że żadna część takiego zdania nie jest już zdaniem, jest więc ono w konstrukcjach gramatycznych czymś podobnym do atomu. Nie jest zdaniem atomowym np. podane wyżej zdanie warunkowe o Salomonie. A oto przykłady zdań atomowych (kursywa wyróżnia nazwy indywiduowe).

Salomon jest mędrcem.
13 jest liczbą pierwszą.
Bush jest prezydentem *USA*.
Warszawa leży między *Berlinem* i *Moskwą*.

Rozważalismy do tej pory aspekty gramatyczne czyli syntaktyczne zdania atomowego, to znaczy odnoszące się do struktury językowej zdania. **Syntaktyka** jest tą częścią teorii języka, która dotyczy stosunków między składnikami wyrażeń złożonych i przekształcania jednych wyrażeń w inne.

Dział teorii języka, który rozpatruje stosunki między wyrażeniami a rzeczywistością nazywa się **semantyką**. Dla logiki szczególnie ważne jest semantyczne pojęcie prawdy jako stosunku pewnej zgodności między zdaniem a opisywanym przez nie faktem.

Poza tym wyróżniamy dział zwany **pragmatyką**, mający za przedmiot stosunki między językiem i jego użytkownikami. Ten, jako dotyczący zagadnień bardziej złożonych, nie mieści się w elementarnym kursie logiki, wchodzi natomiast do badań bardziej zaawansowanych; jednocześnie, w części dotyczącej komunikacji językowej pragmatyka stanowi współczesny odpowiednik dawnej retoryki. Tak więc czcigodne Trivium odżywa dziś pod postacią logiki z właściwą jej semantyką, syntaktyki (gramatyka) oraz pragmatyki (retoryka).

Od strony semantycznej, zdanie atomowe charakteryzuje się tym, że stwierdza należenie pewnego indywiduum do jakiegoś zbioru indywiduów (predykat jednoargumentowy) lub należenie pewnej pary indywiduów do jakiegoś zbioru par, np. Adama i Ewy do zbioru małżeństw (predykat dwuargumentowy), albo należenie pewnej trójki indywiduów do jakiegoś zbioru trójek, i tak dalej. Przykładem trójki niech będzie Berlin, Warszawa i Moskwa; należy ona do zbioru trójek miast takich, że drugie *leży między* (predykat trójargumentowy) piewszym i trzecim.

2.2. Predykaty, stałe i zmienne, formuły atomowe. W charakterystyce zdania atomowego zawiera się informacja, że do języka logiki predykatów należą predykaty oraz nazwy indywiduowe, w szczególności imiona własne; w roli takich nazw mogą występować też *zaimki*, pod warunkiem, że ich odniesienie jest widoczne z kontekstu. Gdy rozważamy zastosowania logiki w sposób ogólny, to znaczy nie mając na uwadze, określonych indywiduów, zbiorów i relacji, to zamiast predykatów i nazw używamy pojedynczych liter, odróżniając umownie jedną kategorię od drugiej np. w ten sposób, że predykatami są duże litery (wersaliki) od P do S, a nazwami małe litery od a do d; gdy zabraknie tych symboli, możemy je dowolnie rozmnażać dodając wskaźniki cyfrowe u dołu, np. a_1, a_2, b_1, P_1, Q_{1001}.

Reguła składniowa dotycząca budowania zdań atomowych przepisuje kolejność: najpierw predykat, potem argumenty, te drugie podawane zwykle w nawiasach i oddzielane przecinkami.[6] Oto przykłady: $P(a)$, $Q(a,c)$, $R(d,a,b)$.

Oprócz nazw indywiduowych i predykatów należą do słownika *logiki pierwszego rzędu* **zmienne indywiduowe**, to jest symbole, które występują w roli argumentów predykatu i bez naruszenia poprawności składniowej mogą być zastępowane nazwami indywiduowymi. W tym kontekście, nazwy indywiduowe bywają też określane jako **stałe indywiduowe**, dla przeciwstawienia ich zmiennym z tejże, odnoszącej się do indywiduów, kategorii. Zmienne indywiduowe bierzemy zwykle z końca alfabetu jako małe litery *u*, *w*, *x*, *y*, *z*.

Podane wyżej zastrzeżenie, że chodzi tu o teorię zwaną logiką pierwszego rzędu jest potrzebne dla odróżnienia od **logiki drugiego rzędu**, która zawiera też zmienne predykatowe. Nie będziemy tu korzystać z tej bardziej zaawansowanej teorii; trzeba ją jednak wspomnieć, by uprzedzić pytanie, dlaczego wprowadza się zmienne indywiduowe, paralelnie do nazw indywiduowych, a brakuje takiej paraleli w przypadku predykatów. Jest to też moment, by powtórzyć z naciskiem, że litery używane w logice pierwszego rzędu jako predykaty nie są symbolami zmiennymi (mimo, że skądinąd litery występują w roli zmiennych), lecz są przykładowymi predykatami, mającymi tę zaletę, że są krótkie i nie odwracają uwagi ku jakiejś fabule; np. $P(c)$ jest równie konkretnym zdaniem atomowym jak *Cycero przemawia*, ale w wykładzie logiki bywa wygodniej posłużyć się raczej pierwszym niż drugim.

Wyrażenie złożone z predykatu i mające wśród argumentów przynajmniej jedną zmienną indywiduową, np. x, określać będziemy terminem **formuła zdaniowa**.[7]

2.3. Kwantyfikatory. Ich rola i sposób zapisu. Wyliczywszy jako elementy naszego języka predykaty, nazwy (stałe) indywiduowe i zmienne indywiduowe, zamykamy tę listę wymieniając na niej **kwantyfikatory**. Ich rola w logice predykatów jest analogiczna do roli funktorów prawdziwościowych w logice zdań — w tym sensie, że jedne i drugie należą do **stałych logicznych**, to jest tych symboli, od których użycia zależy poprawność wnioskowania opisana odpowiednimi regułami. Odwołując się w tym określeniu do terminu *reguła wnioskowania*, bierzemy go w znaczeniu zdefiniowanym przez podanie listy takich reguł (jak te rozważane w następnym rozdziale).

W klasycznej logice pierwszego rzędu mamy dwa kwantyfikatory; każdy z nich służy do poprzedzania formuły zdaniowej w celu wskazania, do ilu indywiduów należy tę formułę odnieść, mianowicie czy do wszystkich, czy do niektórych, przy czym ‘niektóre’ znaczy tyle, co ‘przynajmniej jeden’. Jest to, co prawda, dość ogólnikowe określenie ilości, ale wystarcza dla teorii wnioskowania. Nie zawahano się więc ukuć nazwę nawiązującą do owego zadania określania ilości, którą w łacinie oddaje słowo *quantum* lub *quantitas*; tak powstało słowo ‘kwantyfikator’.

Kwantyfikator służący do powiedzenia, że poprzedzona nim formuła odnosi się do wszystkich podstawień za (wskazaną przy tym kwantyfikatorze) zmienną, nosi miano **kwantyfikator ogólny**. Na przykład, gdy ustalimy, że zmienna ‘x’ odnosi się do elementów zbioru chmur, to zdanie ‘$\forall_x Q(x)$’, gdy predykat ‘Q’ czytamy ‘powstaje z pary wodnej’, powiada, że wszystkie chmury powstają z pary wodnej; w innym wysłowieniu: każda chmura powstaje z pary wodnej.

Kwantyfikator służący do powiedzenia, że poprzedzona nim formuła odnosi się do przynajmniej jednego podstawienia za (wskazaną przy tym kwantyfikatorze) zmienną, jest określany jako **kwantyfikator egzystencjalny**. Gdy ustalimy, że zmienna „x” odnosi się, powiedzmy, do elementów zbioru chmur, to zdanie ‘$\exists_x Q(x)$’, gdy predykat ‘Q’ czytamy jak wyżej, powiada, że przynajmniej

[6] Czasem stosuje się notację bez nawiasów i przecinków; czasem zaś, w przypadku predykatów dwuargumentowych, i taką, że predykat znajduje się między argumentami, np. aRc, na wzór $a = b$.

[7] Terminologia w tej sprawie nie jest w pełni ustalona. Np. MEL rejestruje termin ‘funkcja propozycjonalna’ w tym sensie, który przydziela się tu terminowi ‘formuła zdaniowa’; czasem też występuje w tej roli termin ‘funkcja zdaniowa’.

jedna chmura powstaje z pary wodnej. Kwantyfikator egzystencjalny nazywa się też *szczegółowym*, a zapis '$\exists_x \ldots$' może być czytany na parę sposobów: 'istnieje takie x, że $\ldots$' lub 'dla pewnego $x \ldots$' lub 'dla niektórych $x \ldots$'.

Nie jest to jedyna możliwa notacja dla kwantyfikatorów. Nieraz spotyka się kwantyfikator ogólny w kształcie powiększonego symbolu koniunkcji, a kwantyfikator egzystencjalny w kształcie powiększonego symbolu alternatywy. I tak:

zamiast $\forall_x \varphi(x)$ piszemy $\bigwedge x\varphi(x)$;
zamiast $\exists_x \varphi(x)$ piszemy $\bigvee x\varphi(x)$.

Symbolika jest, oczywiście sprawą umowy i z teoretycznego punktu widzenia jest obojętne, jakich oznaczeń będziemy używać. Nie jest to jednak obojętne, gdy patrzeć pod kątem sterowania przez symbolikę procesami konceptualizacji (to samo dotyczy terminologii nie-symbolicznej).[8]

Graficzne podobieństwo kwantyfikatora ogólnego i symbolu koniunkcji wskazuje na to, że formuła nim poprzedzona jest skondensowaną koniunkcją; w analogiczny sposób kwantyfikator egzystencjalny wiąże się z alternatywą. Załóżmy, dla przykładu, że zmienna indywiduowa x odnosi się do dwuelementowego zbioru mieszkańców raju, mianowicie Adama (w skrócie, a) i Ewy (e); niech predykat 'P' odnosi się do cechy pracowitości. Wtedy będą równoważne (parami) następujące zdania:

$\bigwedge xP(x)$ — $P(a) \& P(e)$;

$\bigvee xP(x)$ — $P(a) \vee P(e)$.

Zalety teoretyczne tej symboliki, polegające na ukazaniu związków pojęciowych z funktorami logiki zdań, są okupione mniejszą jej przejrzystością. Toteż używać będziemy dalej symboliki z odwróconymi 'A' i 'E' jako przejrzystszej, a nie pozbawionej walorów dydaktycznych. Litery te wskazują na stosunek kwantyfikatorów do języka naturalnego, wzięły się bowiem z ich odczytywania w szeroko znanych językach: '$\forall$' pochodzi od 'A' w angielskim *all* i niemieckim *alles* (wszystko), zaś '$\exists$' od 'E' w angielskim *exists* i niemieckim *existiert* (istnieje).[9]

2.4. Zmienne wolne i związane. Zasięg kwantyfikatora. Charakterystyczne dla języka logiki predykatów są pojęcia zasięgu kwantyfikatora, zmiennej związanej i zmiennej wolnej. Trzeba je rozumieć w łączności z gramatycznym zjawiskiem zasięgu funktora, zaznaczanego za pomocą nawiasów lub innych środków interpunkcyjnych.

W języku naturalnym, który w tworzeniu struktur składniowych nie posługuje się tak konsekwentnie jak język logiki środkami interpunkcji (mając za to bogactwo środków intonacyjnych), zasięg funktora nie zawsze jest w pełni określony, skąd bierze się czasem brak składniowej jednoznaczności. Weźmy dla przykładu funktor negacji w zdaniu:

(Z) Plan nie został całkowicie wykonany.

(cytat z gazety z epoki gospodarki planowej). Zdanie to ma trzy interpretacje w zależności od zasięgu słówka 'nie', mianowicie:

(Z_1) Plan został całkowicie nie–wykonany.

[8] Są autorzy, którzy lekceważą ten aspekt symboliki i terminologii. Dlatego warto przypomnieć, że przywiązywali do niego wielką wagę tacy koryfeusze matematyki i filozofii jak Gottfried Wilhelm Leibniz i Georg Cantor. Ten drugi, tworząc z gruntu nową dyscyplinę matematyczną, teorię mnogości, każdemu wprowadzanemu symbolowi poświęcał wiele namysłu, nieraz korespondując w tej sprawie z kolegami. Leibniz stawiał przed językiem symbolicznym wymaganie, żeby pełnił on dla umysłu taką rolę jak nić Ariadny prowadząca Tezeusza w labiryncie, stąd jego określenie języka jako *filum cogitationis* (tj. nić, a zarazem, sposób, myślenia).

[9] W sprawie jeszcze innych notacji zob. ELF, rozdz. XLVII, odc. 3.8.

(Z_2) Plan został wykonany [ale] nie–całkowicie.

(Z_3) Nieprawda, że plan został całkowicie wykonany.

W dwóch pierwszych interpretacjach zasięgiem funktora negacji jest wyrażenie oddzielone od niego kreską, co daje w każdym przypadku inne znaczenie; w Z_2 jest ono uwyraźnione dodatkiem domyślnego 'ale', którego funkcja może być zrealizowana także środkami intonacyjnymi. W trzeciej interpretacji w zasięgu przeczenia jest całe zdanie, które będzie prawdziwe zarówno przy pierwszej jak i przy drugiej interpretacji, tj. zarówno wtedy gdy planu nie wykonano w ogóle, jak i wtedy, gdy został wykonany tylko częściowo; jest to więc wypowiedź bardziej niż przy poprzednich interpretacjach ogólnikowa.

W powyższym przykładzie ujednoznacznienie struktury dokonuje się przez zmianę szyku w przypadku interpretacji Z_1 i Z_2, zaś w Z_3 przez coś podobnego do nawiasu, bo słówko 'że' zapowiada pojawienie się po nim całego zdania (tzw. zdania zależnego), a więc wyznacza tu zasięg negacji podobnie jak uczyniłby to nawias w takiej oto (raczej sztucznej) konstrukcji:

Z_{3a} nieprawda (plan został całkowicie wykonany).

Te odniesienia do swojskiej polszczyzny powinny pomóc w ujęciu roli nawiasów w wyrażeniach z kwantyfikatorami. Zarazem, pojawi się zjawisko nieznane w języku naturalnym — wiązanie zmiennych przez kwantyfikatory. Zamiast opisywać je teoretycznie, wyjaśnijmy je na przykładach, które w tym przypadku stanowią wystarczający ekwiwalent teorii. Rozważmy trzy następujące formuły zdaniowe:

$$\forall_x \exists_y R(x,y),\ \forall_x R(x,y),\ \exists_y R(x,y).$$

W pierwszej z nich związane są obie zmienne, w drugim tylko pierwsza zmienna, w trzecim tylko druga. Zmienna, która w danej formule nie jest związana nazywa się w niej **zmienną wolną**, zaś **zmienną związaną** jest ta, która ma kształt identyczny z literą w sąsiedztwie kwantyfikatora. O kwantyfikatorze mającym bezpośrednio po sobie (w niektórych notacjach pod sobą) literę identyczną co do kształtu (choć może być innej wielkości) ze zmienną w następującej dalej formule atomowej mówi się, że wiąże on tę zmienną.

Gdy idzie o formuły nie będące atomowymi, wiązanie zmiennej wymaga środków składniowych w rodzaju nawiasów. Porównajmy formułę

$$\forall_x P(x) \& Q(x) \text{ z formułą } \forall_x (P(x) \& Q(x)).$$

W pierwszej z nich kwantyfikator wiąże tylko pierwsze wystąpienie zmiennej 'x', w drugim oba jej wystąpienia. W obu przypadkach powiemy o zmiennej 'x', że jest w danej formule związana. Tym, co różni powyższe formuły jest **zasięg kwantyfikatora**. W pierwszej z nich znajduje się w jego zasięgu jedynie pierwszy człon koniunkcji, w drugiej zaś cała koniunkcja, a to z powodu obejmującego ją całą nawiasu, który zaczyna się po kwantyfikatorze. Ten prosty przypadek powinien ukazać prawa zasięgu i wiązania w sposób wystarczający do ich rozpoznawania także w przypadkach bardziej skomplikowanych; nawiasy bowiem są znakami, które swój sens same wyjaśniają.

2.5. Definicja formuły logiki predykatów. Wykorzystanie jej jako przykładu definicji indukcyjnej. To, co w obecnym rozdziale powiedziano o języku logiki predykatów pierwszego rzędu zostanie obecnie podsumowane w jednej definicji, która z dużą dokładnością określi, co jest formułą w tym języku. Pod względem metody definiowania należy ona do klasy definicji indukcyjnych, na tyle ważnej dla metod definiowania, że — przy okazji wystąpienia jej po raz pierwszy — jest miejsce na stosowny komentarz metodologiczny, dzięki któremu i treść definicji stanie się zrozumialsza.

Definicja indukcyjna, zwana też *rekurencyjną*, dotyczy predykatu lub symbolu funkcyjnego, charakteryzuje więc jakiś zbiór.[10] Tutaj jest to zbiór formuł rozważanego języka logiki pierwszego rzędu, w skrócie 'LP_1'; oznaczmy ten zbiór przez 'F'. Następujące dalej określenie predykatu 'jest formułą LP_1' składa się — jak każda definicja indukcyjna — z dwóch warunków. Warunek wyjściowy wymienia formuły, o których się przyjmuje, że już są elementami F, a warunek indukcyjny wymienia operacje, które przekształcają elementy zbioru F (już w nim obecne) w nowe jego elementy. Mówiąc obrazowo, definicja indukcyjna jest to recepta na rozpoznanie, które elementy już są w danym zbiorze (warunek wyjściowy) oraz na produkowanie nowych z dotychczas się tam znajdujących (warunek indukcyjny). Metoda ta określa zbiory o potencjalnie nieskończonej liczbie elementów, ponieważ operacje produkujące nowe elementy można powtarzać dowolnie wiele razy.

Oto definicja indukcyjna formuły języka LP_1.

Warunek wyjściowy:

Formułą języka LP_1 jest każde wyrażenie, które jest bądź (*a*) pojedynczą zmienną zdaniową, bądź (*b*) jest złożone z predykatu *n*-argumentowego (gdzie *n*=1, 2, 3 etc.) oraz *n* symboli, którymi są stałe indywiduowe lub zmienne indywiduowe. Wyrażenie opisane w punkcie *b* nazywa się **formułą atomową**.[11]

Warunek indukcyjny:

Formułą języka LP_1 jest również każde wyrażenie powstające w wyniku jednej z następujących operacji:

(1) poprzedzenie formuły funktorem negacji;
(2) połączenie dwóch formuł funktorem koniunkcji lub alternatywy, implikacji, równoważności;
(3) poprzedzenie formuły kwantyfikatorem ogólnym lub egzystencjalnym.

Każda więc formuła powstaje z formuł atomowych przez zastosowanie ileś razy operacji 1, 2, 3. Na przykład, zaczynamy od formuły atomowej $P(x)$, poprzedzamy ją funktorem negacji, a potem kwantyfikatorem ogólnym. Tak powstaje formuła $\forall_x \neg P(x)$. Można też wpierw dopisać kwantyfikator, a potem negację, co da $\neg\forall_x P(x)$. Teraz, biorąc jeden z symboli wymienionych w warunku 2, np. funktor implikacji, możemy połączyć dwie już utworzone formuły, otrzymując wyrażenie:

$$\forall_x \neg P(x) \Rightarrow \neg\forall_x P(x).$$

Jest to znów formuła, czyli wyrażenie poprawnie zbudowane, czyli gramatyczne, języka LP_1. Możemy dalej powiększać jej złożoność, np. ujmując ją w nawias i łącząc symbolem koniunkcji z pojedynczą zmienną zdaniową p, i tak dalej.

Indukcyjna metoda definiowania została wynaleziona na potrzeby matematyki, ale jak widać z obecnego przykładu, da się ją z powodzeniem stosować do zbiorów obiektów nie będących przedmiotami matematycznymi. Na przykład, na wzór definicji formuły można by zbudować definicję zdania w języku polskim. Bogactwo tego języka i liczne nieregularności wielce by skomplikowały taką definicję indukcyjną, ale pozostaje ona możliwa, przynajmniej dla jakichś fragmentów języka naturalnego.

[10] Pojęcie zbioru wprowadza się za pomocą logiki predykatów w rozdziale szóstym; wystarczy jednak dla śledzenia obecnych wywodów sam ich kontekst wraz z intuicyjnym, obecnym na codzień w myśleniu, pojęciem zbioru.

[11] Przypomnijmy, że gdy w formule atomowej występują same stałe indywiduowe, np. imiona własne, nazywa się ona zdaniem atomowym; tak więc, każde zdanie atomowe jest formułą atomową, mianowicie jej granicznym przypadkiem (pozbawionym zmiennych), podczas gdy nie każda formuła atomowa jest zdaniem atomowym (nie jest nim, gdy zawiera bodaj jedną zmienną).