# Prawa de Morgana i ich zastosowania: wyprowadzone z nich nich pomocnicze reguły wnioskowania równoważności odpowiadające definicjom kwantyfikatorów

**1.** Te prawa logiki, które są szczególnie cenione z racji przydatności mają nadane nazwy, sięgające nieraz średniowiecza. Niektóre nazwy nawiązują do roli pełnionej przez prawo, inne do nazwiska jego odkrywcy. Od nazwiska brytyjskiego logika Augusta de Morgana (1806-1871) bierze imię cała rodzina praw, której odgałęzienia znajdujemy w rachunkach klas, zdań, predykatów (oryginalne prawa odkryte przez de Morgana należą do rachunku klas). Oto prawa rachunku predykatów zestawione z ich odpowiednikami z rachunku zdań.

[1] $\neg\forall_x P(x) \Rightarrow \exists_x \neg P(x)$ $\qquad \neg(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

[2] $\exists_x \neg P(x) \Rightarrow \neg\forall_x P(x)$ $\qquad \neg(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

---

[3] $\neg\exists_x P(x) \Rightarrow \forall_x \neg P(x)$ $\qquad \neg(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

[4] $\forall_x \neg P(x) \Rightarrow \neg\exists_x P(x)$ $\qquad (\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg(p \vee q)$

**Dowód prawa [1]**

1. $\neg\forall_x P(x)$.
2. $\neg\exists_x(\neg P(x))$.
3. $\neg P(a)$ ..... 1, [a].
4. $\neg(\neg P(a))$ ..... 2; uwaga: pierwszy znak negacji powstaje w wyniku zastosowania reguły [$\neg\exists$], drugi należy do formuły „wewnętrznej".
5. $P(a)$ ..... 4.

===========

**Dowód prawa [2]**

1. $\exists_x \neg P(x)$.
2. $\neg(\neg\forall_x P(x))$.
3. $\forall_x P(x))$ ..... 2.
4. $\neg P(a)$ ..... 1, [a].
5. $P(a)$ ..... 3.

===========

**Dowód prawa [3]**

1. $\neg\exists_x P(x)$.
2. $\neg\forall_x(\neg P(x))$.
3. $\neg(\neg P(a))$ ..... 2, [a].
4. $P(a)$ ..... 3.
5. $\neg P(a)$ ..... 1.

============

**Dowód prawa [4]**

1. $\forall_x \neg P(x)$.
2. $\neg(\neg\exists_x P(x))$.
3. $\exists_x P(x))$ ..... 2.
4. $P(a)$ ..... 3, [a].
5. $\neg P(a)$ ..... 1.

============

Udowodniwszy implikację [1] i jej odwrotność [2], udowodniliśmy tym samym równoważność:

[1-2] $\neg\forall_x P(x) \Leftrightarrow \exists_x \neg P(x)$.

Udowodniwszy implikację [3] i jej odwrotność [4], udowodniliśmy tym samym równoważność:

[3-4] $\neg\exists_x P(x) \Leftrightarrow \forall_x \neg P(x)$.

Prawa de Morgana są zwykle cytowane w powyższej postaci równoważnościowej. Rozważmy kolejno (w odcinkach 2 i 3) dwa ważne ich zastosowania.

**2.** Każde prawo logiki w formie implikacji (co obejmuje równowazność jako implikację obustronną) nadaje się do tego, żeby na jego podstawie wprowadzić odpowiadającą mu regułę wnioskowania. Innymi słowy, gdy mamy prawo $\phi \Rightarrow \psi$, upoważnia to do wprowadzenia reguły $\phi$ $\psi$ czyli: z $\phi$ wolno wywnioskować $\psi$ (skośna kreska „ułamkowa" zamiast poziomej niech posłuży do odróżnienia reguł wtórnych od pierwotnych). Tego rodzaju reguły, zwane wtórnymi, znacznie ułatwiają dowodzenie, choć nie są w danej teorii konieczne.

Prawo oznaczone wyżej jako [1] upoważnia do wprowadzenia reguły:

[neg-$\forall$] $\neg\forall_x \phi(x)\ /\ \exists_x \neg\phi(x)$,

Przesunięcie znaku negacji jak najbliżej formuły objętej kwantyfikatorami ułatwia rozpoznanie (zwłaszcza przy większej liczbie kwantyfikatorów następujących po negacji), którą z reguł pierwotnych należy w danym przypadku zastosować.

Prawo oznaczone wyżej jako [3] upoważnia do wprowadzenia reguły:

[neg-$\exists$] $\neg\exists_x \phi(x)\ /\ \forall_x \neg\phi(x)$,

Uzasadnienie jej wprowadzenia – analogiczne jak wyżej. Zapis '$\phi(x)$' znaczy, że mamy na uwadze formułę o dowolnej strukturze, w której występuje przynajmniej raz '$x$' jako zmienna wolna. Niczego nie przesądzamy w takim zapisie co do tego, czy występują w $\phi$ jeszcze inne zmienne, inne kwantyfikatory czy, ewentualnie, funktory rachunku zdań; nie określamy też, ile jest w formule $\phi$ predykatów ani ile mają one argumentów. Jest to więc najbardziej schematyczna charakterystyka formuły, skupiająca uwagę tylko na tym, co konieczne dla opisu danego wnioskowania.

**3.** Wychodząc z formuł [1-2] i [3-4], możemy je w elegancki sposob uprościć i otrzymać formuły szczególnie pouczające z metodologicznego punktu widzenia. W tym celu, w każdej z tych równoważności negujmy obie strony, co od formuł prawdziwych prowadzi do prawdziwych, zgodnie z tabelką dla równoważności: z $\phi \Leftrightarrow \psi$ wolno wywnioskować $\neg\phi \Leftrightarrow \neg\psi$. Następnie uproszczamy w każdej równoważności lewą stronę zastępując ją formułą bez negacji, zgodnie z prawem podwójnego przeczenia $\phi \Leftrightarrow \neg(\neg\phi)$. Tak otrzymujemy, co następuje:

$\forall_x P(x) \Leftrightarrow \neg\exists_x \neg P(x)$ [Df.$\forall$] $(przez\ \neg\exists\neg)$;

$\exists_x P(x) \Leftrightarrow \neg\forall_x \neg P(x)$ [Df.$\exists$] $(przez\ \neg\forall\neg)$.

Nadanie tym formułom charakteru definicji, wskazane etykietami w prawej kolumnie, należy tak rozumieć, że *mogą* one, ale *nie muszą* być traktowane jako definicje. Zależy to od tego, jaką się przyjmie metodę budowania rachunku predykatów. To. że istnieje taki zakres swobody w tworzeniu teorii, nie tylko dedukcyjnych lecz także empirycznych jest lekcją metodologiczną, którą zawdzięczamy refleksji nad prawami de Morgana.

Zauważmy, że praktykując badanie tautologiczności metodą drzew analitycznych, nie potrzebujemy definicji, które wyjaśniałyby sens symboli logicznych. Nie odróżniamy też terminów pierwotnych, a więc pozbawionych definicji, od wtórnych, to jest takich, które są zdefiniowane za pomocą pierwotnych. Nie czynimy tego dlatego, że wszystkie symbole są w tym przypadku piewotne.

A co one znaczą, dowiadujemy się nie z definicji, lecz z reguł mówiących, jak je stosować, tych od [$\neg\neg$] po [$\neg\forall$]. Stosując owe symbole w postępowaniu, które rozstrzyga, czy dana formuła jest tautologią, dajemy tym świadectwo, że znamy ich sens; bo znać sens terminu, to nic innego, jak umieć się tym terminem posługiwać. Taką rolę instrukcji posługiwania się terminami pełnią, oprócz reguł, aksjomaty teorii, a gdy teoria nie jest zaksjomatyzowana, pełnią ją postulaty znaczeniowe.

Bywa jednak, że jest dogodniej ograniczyć liczbę terminów pierwotnych, co redukuje liczby aksjomatów lub reguł (zwiększa więc w pewien sposób ekonomię postępowania). Do roli terminów pierwotnych, zdolnych definiować pozostałe, nadaje się zwykle kilka ich zbiorów (np. w rachunku zdań nadaje się do tego koniuncja i negacja, alternatywa i negacja etc.). Mamy więc pewną swobodę wyboru.

Rzut oka na formuły [Df.$\forall$] i [Df.$\exists$] uświadamia, że mamy podobną swobodę w przypadku kwantyfikatorów. [Df.$\forall$] powiada, że zamiast używać dłuższego zwrotu z kwantyfikatorem egzystencjalnym (po prawej stronie) możemy użyć krótszego (wymienionego po lewej stronie). Wtedy kwantyfikator egzystencjalny i negacja występują w roli terminów pierwotnych użytych do zdefiniowania kwantyfikatora ogólnego. Formuła zaś [Df.$\exists$] zawiera ofertę odwrotną: zdefiniować '$\exists$' przez '$\forall$' i '$\neg$'. Gdy któraś z tych dwu formuł występuje w roli definicji, to dobrze jest dla jasności podkreślić to za pomocą takiego symbolu równoważności, ktory zarazem informuje, że jest to równoważność definicyjna czyli przyjęta w wyniku definicji, a nie, jak to było uczynione wyżej, to jest wyniku dowodu; w przypadku pierwszej z formuł będzie to zapis następujący.

$$\forall_x P(x) \Leftrightarrow_{df} \neg\exists_x \neg P(x) \qquad \text{[Df.}\forall\text{]} \ \ (przez\ \neg\exists\neg);$$

Analogicznie uzupełnimy drugą formułę, jeśli tę właśnie przeznaczymy do roli definicji, decydując się mieć kewantyfikator ogólny za termin pierwotny, egzystencjalny zaś za wtórny czyli zdefiniowany.

Jest to w kwestii definiowania modelowa sytuacja, która może posłużyć za wzorzec pewnych wariantów postępowania w badaniu naukowym, także w naukach empirycznych, społecznych nie wyłączając. Byłoby np. do zbadania, czy podpada pod ten wzorzec para podstawowych terminów socjologicznych, którymi są: 'więź społeczna' i 'grupa społeczna'. Można starać się określić sens każdego z nich z osobna przez podanie sposobów używania (jak to czynią w stosunku do kwantyfikatorów reguły systemu drzew analitycznych). Będą to odpowiednie postulaty znaczeniowe, jak np. ten, że warunkiem koniecznym zaistnienia grupy jest liczebność wyrażająca się conajmniej liczbą dwa (w innych ujęciach, trzy); oczywiście, powinny temu towarzyszyć dla dopełnienia charakterystyki jeszcze inne określenia warunków koniecznych, jak i wystarczających. Gdy jakiś drugi układ postulatów określi sposób posługiwania się terminem 'więź solidarności', można następnie dowodzić następującego twierdzenia socjologicznego w postaci równoważności, które odnosi się do dziedziny złożonej z ludzi i struktur (w tym grup) społecznych.

$$\forall_{x,y}((H(x) \wedge H(y)) \Rightarrow (Sol(x,y)) \Leftrightarrow \exists_z(G(z) \wedge x \in z \wedge y \in z))).$$

Oznaczenia:

$H$ – jest człowiekiem (homo)
$G$ – jest grupą społeczną
$Sol(x,y)$ — $x$-a łączy z $y$ więź solidarności grupowej.

Symbol należenia do zbioru '$\in$' jest wzięty z teorii zbiorów i zastosowany tu na tej podstawie, że grupa społeczna jest strukturą czyli zbiorem uporządkowanym przez pewną relację; należenie zatem do grupy jej członków jest należeniem ich do pewnego zbioru.

Można jednak ukształtować teorię społeczną w ten sposób (wzorując się drugiej z opisanych wyżej sytuacji w teorii predykatów), że tylko jeden z dwóch terminów ($G$, $Sol$) będzie pierwotny, a drugi zostanie zdefiniowany za jego pomocą. Analogicznie da się rozpatrywać inne pary sprzężonych ze sobą wzajem treściowo pojęć, np. w Toynebee'go i Huntingtona koncepcji cywilizacji jest ta koncepcja nieodłączna od pojęcia religii, a tę nierozdzielność można interpretować jako zdefiniowanie jednego poječia [przez drugie lub jako wynik dowodu wykazującego związek dwóch pojęć takich, ąe treść każdego z nich jest określona niezależnie od drugiego (gdyby Huntington prowadzil swe wywody z taką świadomością metodologiczną, nie byłoby tylu niejasności i niekonsekwencji, jak te cechujące jego mówienie o konflikcie cywilizacji).

To, którą strategię się zastosuje, ma znaczenie dla metody uzasadniania teorii. Uzasadnienie empiryczne polegające na stwierdzeniu, że nie znajduje się kontrprzykładów pomimo rzetetelnego ich poszukiwania (Popperowski postulat falsyfikowalności), nie da się zastosować do równoważności będących definicjami. Da się natomiast zastosować do tych równoważności, w których żaden człon nie definiuje drugiego z członów.