

II. Zadania z rachunku predykatów

Badanie poprawności wnioskowań, dowodzenie reguł wtórnych, kontrprzykłady

©Witold Marciszewski

Strukturę logiczną w tych zadaniach wyznaczają, prócz operatorów logiki zdań, **kwantyfikatory**. Mówią one, że dany predykat dotyczy wszystkich lub że niektórych elementów rozważanego zbioru (gdy jest to zbiór ludzi, „ktoś” znaczy „pewien człowiek”). Wzięcie w nawias wyrazu „nie” wskazuje, że jest on zbędny logicznie (negacja jest już w treści „nikt” itp), ale dodatkowego słowa negującego wymaga gramatyka polska (np. w angielskim nie ma tego nadmiaru słów negujących; zdanie 2 brzmiałoby „nobody is omnipotent”).

Instrukcja do zadań Z1 i Z2

Każde z tych zadań dostarcza dwa razy tylu ćwiczeń, ile jest w nim numerowanych zdań. Raz tworzymy implikacje biorąc za poprzednik zdanie T występujące w tytule zestawu, a za następnik kolejne ze zdań numerowanych. Drugim razem bierzemy zdanie numerowane jako poprzedniki, za następnik przyjmując zdanie tytułowe.

Zadanie Z1: **T. Nie (jest tak, że) każdy jest wszechmocny.**

1. Ktoś nie jest wszechmocny.
2. Nikt [nie] jest wszechmocny.
3. Ktoś jest wszechmocny.
4. Obecny premier Polski nie jest wszechmocny.

Zadanie Z2: **T. Każdego ktoś lubi.**

1. Ktoś lubi kogoś.
2. Nie każdego ktoś lubi.
3. Każdy lubi każdego.
4. Każdy lubi siebie
5. Ewa lubi każdego.
6. Ewa lubi kogoś.
7. Adam lubi Ewę.
8. Ktoś lubi Ewę.
9. Ktoś [nie] lubi nikogo.
10. Nikt [nie] lubi nikogo.

Zadanie Z3: **Dowody wtórnych reguł wnioskowania.**

1. Reguła dołączania podwójnej negacji:

$$[+ \neg \neg] \quad A / \neg(\neg A).$$

2. Reguła akceptacji następnika (RAN), inaczej reguła odrywania (RO):

$$A \Rightarrow B, A / B.$$

3. Reguła odrzucania poprzednika (ROP):

$$A \Rightarrow B, \neg B / \neg A.$$

4. Reguła transpozycji:

$$A \Rightarrow B / \neg B \Rightarrow \neg A.$$

5. Reguła akceptacji członu alternatywy:

$$A \vee B, \neg A / B. \quad A \vee B, \neg B / A.$$

6a. Reguła sylogizmu, ogólna:

$$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C / A \Rightarrow C.$$

6b. Reguła sylogizmu dla kwantyfikatorów:

$$\forall x(A(x) \Rightarrow B(x)), \forall x(B(x) \Rightarrow C(x)) / \forall x(A(x) \Rightarrow C(x)).$$

7. Reguła składania implikacji (w równoważność):

$$A \Rightarrow B, B \Rightarrow A / A \Leftrightarrow B.$$

8. RAN z konkretyzacją:

$$\forall x(A(x) \Rightarrow B(x)), A(c) / B(c).$$

9. ROP z konkretyzacją:

$$\forall x(A(x) \Rightarrow B(x)), \neg B(c) / \neg A(c).$$

10. Reguła kontrprzykładu:

$$A(c), \neg B(c) / \neg \forall x(A(x) \Rightarrow B(x)).$$

Reguły oparte na prawach de Morgana dla kwantyfikatorów:

$$11. \neg \forall x A(x) / \exists x \neg A(x);$$

$$12. \exists x \neg A(x) / \neg \forall x A(x);$$

$$13. \neg \exists x A(x) / \forall x \neg A(x);$$

$$14. \forall x \neg A(x) / \neg \exists x A(x).$$

Kontrprzykłady do hipotez

Zadanie 4

Źródło:

Jacek Żakowski, „Nowy rozbiór Polski”,
Polityka 21 czerwca 2003. nr 25, s. 33.

Po referendum 2003 w sprawie przystąpienia Polski do UE pojawiły się hipotezy próbujące wyjaśniać wyniki w różnych regionach Polski właściwościami tych regionów. Przeciw niektórym hipotezom wysunięto kontrprzykłady (zob. wyżej "Źródło"). Oceń ich trafność, tzn. rozstrzygnij, czy ze zdań podawanych jako kontrprzykłady istotnie wynika zaprzeczenie danej hipotezy. W tym celu zapisz najpierw hipotezy i kontrprzykłady w języku logiki predykatów.

Hipoteza 1 (H1).

W regionach zachodnich wyraźna większość głosowała prounijnie, ponieważ ich mieszkańcy mają dobre doświadczenia z należącymi do Unii Niemcami.

K1-H1: Zdanie mające być kontrprzykładem nr 1 do H1.

Pewne gminy położone bezpośrednio przy granicy z Niemcami głosowały mniej prounijnie niż pewne gminy w głębi kraju.

K2-H1: Zdanie mające być kontrprzykładem nr 2 do H1.

Podobnie jak regiony zachodnie głosowały pewne regiony przy granicy wschodniej, Bieszczady i dawne Prusy Wschodnie, nie mające doświadczeń sąsiedzkich z Niemcami.

Hipoteza 2 (H2).

W regionach zachodnich wyraźna większość głosowała prounijnie, ponieważ są to tereny mocno zurbanizowane i o solidnej infrastrukturze cywilizacyjnej.

K-H1: Zdanie mające być kontrprzykładem do H2.

Podobnie jak zachodnie głosowały pewne regiony przy granicy wschodniej, Bieszczady i dawne Prusy Wschodnie, słabo zurbanizowane i nie mające solidnej infrastruktury cywilizacyjnej.

Zadanie 5

Źródło:

Mieczysław F. Rakowski, *Jak to się stało*, Polska Oficyna Wydawnicza „BGW”, Warszawa 1991. Tekst ze strony 262 (ostatni akapit książki).

„Teraz los narodu spoczywa w rękach sił politycznych, które wierzą, że sam fakt zmiany systemu zapewni Polsce godność, pokój i dobrobyt. Wyleczy nas z narodowych przywar, umocni nasze zalety. Oby tak się stało. Ale jeśli do tego nie dojdzie, to można liczyć się z tym, że za jakiś czas ukaże się kolejna książka pod tytułem *Jak to się stało*. Innego autora.”

Tym więc, którzy po PZPR przejęli władzę i zamienili system socjalistyczny (centralne planowanie gospodarcze) na wolnorynkowy, przypisuje Rakowski w powyższym tekście następujący pogląd.

To, że jakieś państwo (x) nie jest socjalistyczne ($\neg S(x)$) warunkuje („zapewnia”), że nastaje w nim dobrobyt i inne (wymienione w tekście) dobra ($D(x)$).

Mówienie, że jakiś stan coś warunkuje może znaczyć, że jest on tego czegoś warunkiem tylko wystarczającym lub że tylko koniecznym, lub że jednym i drugim. Rozszerzając problem Rakowskiego (czy brak socjalizmu jest warunkiem dobrobytu) o pytanie dopełniające, czy istnienie socjalizmu jest warunkiem dobrobytu, otrzymujemy różne hipotezy, zależnie od tego, czy „warunkuje” rozumiemy w sensie warunku koniecznego czy wystarczającego.

H1. To, że $S(x)$ zawsze jest warunkiem wystarczającym tego, że $D(x)$.

H2. To, że $S(x)$ zawsze jest warunkiem koniecznym tego, że $D(x)$.

H3. To, że $\neg S(x)$ zawsze jest warunkiem wystarczającym tego, że $D(x)$.

H4. To, że $\neg S(x)$ zawsze jest warunkiem koniecznym tego, że $D(x)$.

Zadanie polega na (a) zapisaniu każdej z tych hipotez w formie ogólnego zdania warunkowego i (b) podaniu, jaką postać miałyby kontrprzykład do każdej z nich. Nie przesądza to, czy rzeczywiście zachodzi opisana w zdaniu kontrprzykładowym sytuacja (nie zachodzi gdy hipoteza jest prawdziwa); jest natomiast potrzebne jako wskazówka, jakiego rodzaju sytuacji należy poszukiwać w celu obalenia danej hipotezy.