Struktury zdaniowe w logice predykatów
pod kątem zastosowań w badaniach socjologicznych

1. Logika cieszy się tą wyróżnioną pozycją, że znajduje zastosowanie w każdej dziedzinie ludzkiej myśli, w szczególności w każdej z nauk, wszędzie bowiem występują rozumowania i definicje, logika zaś dostarcza narzędzi do krytycznej analizy jednych i drugich. Ostatnio, gdy komputery osiągnęły tak niebywałe moce obliczeniowe, ujawniła się nowa przydatność logiki, mianowicie w tworzeniu programów komputerowych do pomocy człowiekowi wszędzie tam, gdzie złożoność rozumowania przekracza możliwości ludzkiej pamięci i ludzkiego tempa pracy.

Doniosłe zastosowania ma zaawansowany dział logiki, przenikajacy się z informatyką, mianowicie teoria procesów dających się sterować algorytmami. Czy należą do tej kategorii procesy społeczne, w szczególności ekonomiczne, a jeśli nie, to które nie należą i dlaczego — to frapujący poznawczo i wielce przydatny praktycznie wątek zastosowań logiki.

Wiedza o tych aplikacjach stanowi kontekst prowadzący do pytania: czy oprócz wspomnianych zastosowań, które są podobne jak w innych dziedzinach, istnieją jeszcze jakieś specyficzne, w których logika oddaje szczególne przysługi naukom społecznym? Odpowiedź brzmi TAK, a powód jest w tym, że logika ma z socjologią, podobnie jak z psychologią, pewien wspólny obszar badań. Są nim procesy myślowe, a wśród nich tworzenie pojęć (m.in. przez definicje) oraz rozumowanie. Wszak wielka część wyjaśnień i przewidywań co do relacji między członkami grup społecznych i relacji między grupami odwołuje się do stanów i procesów umysłowych, jak wyobrażenia grupowe, stereotypy, normy postępowania, mity itd.

Ten wspólny obszar jest oglądany przez logikę i socjologię z różnych punktów widzenia. To jednak nie sprawia, że byłyby one sobie wzajem niepotrzebne. Przeciwnie, są to punkty widzenia tak się dopełniające, że każda strona korzysta od drugiej. Klasycznym przykładem takiej interakcji są badania L. Levy-Bruhla nad umysłowością prymitywną, za której cechę definicyjną, a więc mającą chwytać istotę rzeczy, uznał ten badacz brak postulatu *niesprzeczności*. Posłużył się więc naczelną ideą logiki w tym celu, żeby ująć istotę pewnej sytuacji kulturowej.

Jeśli przyjąć, że wrażliwość na sprzeczność jest stopniowalna, można podejście Levy-Bruhla na tyle uogólnić, żeby charakteryzować relacje społeczne nie tylko w społeczeństwach pierwotnych. Obserwujemy np. taką prawidłowość, że im mniej społeczeństwo jest wykształcone, tym bardziej bezkrytyczne, nie reagujące na sprzeczności. a więc podatne na demagogię. A to już jest dobra podstawa do przewidywania pewnych zachowań społecznych, w szczególności politycznych.[1]

Drugą oprócz pojęć sprzeczności i niespzeczności fundamentalną ideą logiki jest pojęcie wynikania, które się rozdziela na trzy powiązane wzajem ze sobą odmiany:

- *implikacja* (inaczej, wynikanie implikacyjne)
- *wyprowadzalność* (inaczej, wynikanie inferencyjne)
- *wynikanie logiczne*.

Niezbędne dla zrozumienia tych pojęć jest poznanie *formy logicznej* różnego rodzaju zdań, to zaś musi być poprzedzone poznaniem języka, w którym owe formy się oddaje. Nazywamy go *językiem logiki predykatów*, a wstępem do niego są rozróżnienia opisane niżej w ustępie 2.

[1] Teoria Levy-Bruhla bywała kwestionowana, w tym przez badacza tej rangi, co Bronisław Malinowski. Kwestionowano jednak nie samą przydatność kategorii logicznych do opisu stosunków społecznych, ale tezę, że istnieje w tym względzie linia graniczna ostro oddzialająca myślenie ludów pierwotnych i społeczności uczestniczących w cywilizacji. Istotnie, jak zauważa Malinowski, członkowie grup plemiennych kierują się tą samą co my logiką np. w swych czynnościach zawodowych, a odejścia od niej zachodzą dopiero w sferze mitów i magii. Dodajmy, że aby zrozumieć tę odmienność myślenia mitologicznego i magicznego, trzeba się znowu posłużyć wiedzą logiczną.

2. Argument (podmiot), **predykat** (orzeczenie), **zdanie atomowe**. W gramatyce języka polskiego analizuje się w ten sposób zdania elementarne, to jest, pozbawione spójników, że odróżnia się w nich podmiot i orzeczenie. Przyjmuje się, że zawsze jest jeden podmiot (wyraźny lub domyślny), który może być frazą złożoną, a cała reszta zdania nie będąca podmiotem, która także może być złożona, stanowi orzeczenie. Np. w zdaniu „*Skrzypek na dachu* rzewnie gra walca” część zaznaczona kursywą stanowi frazę podmiotu, a reszta frazę orzeczenia. W zdaniu „*trzy* jest większe niż dwa” orzeczeniem jest zwrot „jest większe niż dwa”.

Drugi z tych przykładów pokazuje pewną nienaturalność takiej metody rozbioru gramatycznego. To samo bowiem zdanie zapisane w języku arytmetyki ma postać „$3 > 2$”, a więc owa metoda zmusza nas do uznania, że orzeczeniem jest zestawienie symboli „> 2”. Zestawienie to jednak nie ma sensu w języku arytmetyki. Rozsądniej jest przyjąć, że są tu dwa równorzędne podmioty gramatyczne, mianowicie cyfry „3” i „2”, symbol zaś „$>$” orzeka coś nie o jednym z nich lecz o obu naraz, mianowicie, że obiekt oznaczany przez pierwszą z tych cyfr jest większy od oznaczanego przez drugą.

Ta gramatyka jest idealnie dostosowana do właściwości języka matematyki. W centrum jej uwagi znalazło jest orzekania tak uogólnione, że orzekanie może się odnosić do jednego przedmiotu, pary przedmiotów, trójki, czwórki itd., bez ograniczeń. Gdy się odnosi do więcej niż jednego. mamy do czynienia z *relacją* czyli stosunkiem. I tak, orzekając, że a jest większe niż b, orzekamy dwuczłonowy stosunek większości zachodzący w obrębie pary przedmiotów $a,\ b$ o tych obu przedmiotach naraz. Mówiąc, zaś, że b leży między a i c, orzekamy inny stosunek, tym razem trójczłonowy, o tej trójce.

W gramatyce logicznej termin „podmiot” zastąpiono terminem „argument”, choć ten drugi ma już w logice inne znaczenie, wyrażane także słowem „argumentacja”. Dla obu tych znaczeń istnieje pokrycie w łacinie, gdzie „*argumentum*” oznacza nie tylko argumentację, lecz także to, o czym się coś opowiada; a właśnie podmiot zdanie jest tym, o czym to zdanie opowiada za pomocą orzeczenia. Dla orzeczenia mamy w gramatyce logicznej też specjalne nazwanie, mianowicie „predykat”; jest to termin również wzięty z łaciny, od czasownika „praedicare” (orzekać).

Wyrażając wcześniejsze uwagi w tej nowej terminologii, powiemy, że istnieją predykaty jednoargumentowe (inaczej, jednoczłonowe), dwuargumentowe itd. Teraz mamy już sposób na opisanie w sposób techniczny, jak zbudowane są najbardziej elementarne zdania języka, które przez analogię z rolą atomów w tworzeniu molekuł fizycznych określamy jako *zdania atomowe*. Zdanie takie składa się jedynie z predykatu i tylu argumentów, ilu wymaga sens tego predykatu. Oto kilka przykładów (predykaty zaznaczono podkreśleniem).

Schrøder przewodzi socjaldemokratom niemieckim.

Dwa jest liczbą pierwszą i parzystą.

Schrøder jest partnerem Blaira.

Dwa jest większe niż jeden.

USA pośredniczą między Izraelem oraz Autonomią Palestyńską.

Logika dysponuje symboliką do zapisu zdań atomowych, którą stosuje się wtedy, gdy nie interesuje nas treść zdania, a tylko jego struktura czyli budowa. Wtedy dla wskazania na budowę wystarcza pewna konfiguracja symboli. Mianowicie, jako argumentów używa się małych liter z początku alfabetu, a jako predykatów dużych liter poczynając od „P". Argumenty pisze sie zawsze po predykacie. Można ujmować je w nawias lub nie (wtedy krótkość jest opłacana mniejszą wyrazistością). Tak dostajemy zdania w rodzaju:

$$P(a), \quad Q(a,b), \quad R(a,b,c), \quad S(a,b,c,d).$$

Małe litery są tu traktowane jako wyrażenia odnoszące się do pojedynczych przedmiotów, każda litera do innego przedmiotu. Tym rysem, cechującym także imiona własne, różnią się one od symboli zmiennych określanych jako zmienne indywiduowe. Tym należy poświęcić osobną uwagę.

3. Zmienne indywiduowe. Symbol nazywany *zmienną indywiduową* obejmuje swym zakresem wszystkie indywidua z rozważanej dziedziny rzeczywistości.[2]

W roli takich zmiennych używamy małych liter z końca alfabetu, najchętniej „x" (takie się wytworzyło od dawna przyzwyczajenie), oraz następujących po literze „x" lub ją poprzedzających; a jeśli zabraknie liter, to możemy je rozmnażać za pomocą indeksów, jak „x_1", „x_2" itd, co daje nam do dyspozycji nieskończony repertuar symboli. W odróżnieniu od zmiennych indywiduowych opisane wcześniej symbole „a", „b" etc. są określane jako *stałe indywidowe*.

Posługiwanie się zmiennymi indywiduowymi do zapisywania twierdzeń wymaga określenia zbioru indywiduów, do których te zmienne są odnoszone. Nazywamy ten zbiór mianem *uniwersum*. Raz będzie to taki zbiór, raz inny, w zależności od tego, do jakich problemów stosuje się logikę. Jeśli do arytmetycznych, to za uniwersum przyjmuje się odpowiedni zbiór liczb (naturalnych lub całkowitych lub rzeczywistych etc), powiedzmy **L**; jeśli do astronomicznych, to mamy do czynienia z uniwersum ciał niebieskich **N**; jeśli do botanicznych, to ze zbiorem roślin **R**; i tak dalej. Stąd powiedzenie (ani trochę odkrywcze, ale zdatne do roli przykładu):

$$\textit{dla każdego } x: \; x = x$$

znaczy wtedy, gdy mamy na uwadze zbiór **L**, że każda liczba jest równa sobie; gdy chodzi o **N**, znaczy ono, że każde ciało niebieskie jest identyczne z samym sobą, zaś w przypadku **R**, że to samo odnosi się do roślin. Tego rodzaju różnice w interpretacji, biorące się z różnicy uniwersów, zachodzą w przypadku każdej formuły ze zmiennymi indywiduowymi.

Zmienne indywiduowe służą wraz z predykatami do budowania zdań, ale nie są w tej roli tak samowystarczalne jak stałe indywiduowe występujące w zdaniach atomowych (por. ustęp 2 wyżej). W przypadku stałych wystarczy je połączyć z odpowiednim predykatem, żeby powstało zdanie. Przypomnijmy, znakiem rozpoznawczym *zdania* jest to, że jest ono prawdziwe lub fałszywe, co

[2] W potocznej polszczyźnie indywiduum to tyle, co osobnik. W języku logiki jest to dowolny przedmiot konkretny, a konkretny to znaczy nie będący zbiorem, a więc nie będący obiektem abstrakcyjnym. Pojęcia indywiduum i zbioru są pierwotne, nie dające się zdefiniować za pomocą innych, ich sens wyjaśnia się w kontekście pewnych twierdzeń należących do teorii matematycznej zwanej teorią mnogości. Takie pojęcie indywiduum nie ma charakteru absolutnego; to znaczy, przedmioty będące z pewnego punktu indywiduami z innego punktu widzenia nimi nie są. Liczby naturalne np. są indywiduami w arytmetyce, ale można na nie spojrzeć jak na zbiory.

wyrażamy powiedzeniem, że ma ono *wartość logiczną* zaliczając do wartości logicznych prawdziwość i fałszywość.[3] Otóż za pomocą samych zmiennych z predykatami nie da się utworzyć wyrażenia mającego wartość logiczną. Biorąc za uniwersum zbiór liczb naturalnych, zapytajmy o wartość logiczną wyrażenia:

[1] $y > x$.

W odróżnieniu od wyrażeń o takiej samej strukturze lecz będących zdaniami atomowymi, jak

$2 > 1, \ \ 1 > 2$

nie jest ono ani prawdziwe (jak pierwsze z powyższych zdań atomowych) ani fałszywe (jak drugie z tych zdań).

3. Kwantyfikatory. Aby przejść od formuły [1] do zdania mającego wartość logiczną, trzeba odebrać zmiennym tę charakterystyczną dla nich nieokreśloność, która pozwala je odnosić do dowolnych indywiduów. Czyni się to przez powiedzenie, że mamy na uwadze *wszystkie* indywidua (z danego uniwersum) lub że *przynajmniej jedno*.

Pierwsze z tych powiedzeń oddajemy *kwantyfikatorem ogólnym* i piszemy jako symbol „$\forall$" przed formułą, po którym następuje miniaturowy jakby obrazek pewnej zmiennej występującej dalej w formule, np. „$\forall_x$". O zmiennej wskazanej tym obrazkiem mówimy, że jest w danej formule przez ten kwantyfikator *związana*; jeśli w formule wystąpi zmienna, która nie jest przez żaden kwantyfikator związana, mówimy, że występuje ona jako *zmienna wolna*.

Powiedzenie, że predykat z danej formuły jest spełniany przez przynajmniej jedno indywiduum reprezentowane zmienną oddajemy *kwantyfikatorem egzystencjalnym*, który wraz ze wskazaniem, która zmienna w formule jest przezeń związana ma postać „$\exists_x$", „$\exists_y$" itp. Oto przykłady, jak przez związanie kwantyfikatorami obu zmiennych w formule [1] powstaje z niej zdanie prawdziwe lub fałszywe.

[2] $\forall_y \forall_x . y > x$

[3] $\exists_y \forall_x . y > x$

[4] $\exists_y \exists_x . y > x$

[5] $\forall_x \exists_y . y > x$

Kropka po kwantyfikatorach nie ma żadnej funkcji znaczeniowej, uwyraźnia tylko strukturę, żeby kwantyfikatory nie zlewały się wzrokowo z następująca po nich częścią formuły. Jest ona zbędna wtedy, gdy używa się nawiasów, które w podobny sposób uwyraźniają zapis.

Zdanie [2] jest fałszywe, bo nie jest prawdą, że każda liczba jest większa od każdej (np. dwa nie jest większe od trzech, nie jest wieksze od siebie itd). Także [3] jest fałszywe, bo w nieskończonym zbiorze liczb naturalnych nie istnieje liczba większa od wszystkich. Prawdziwe są dwa ostatnie zdania.

Kwantyfikatory nie byłyby w zasadzie konieczne, gdyby każde uniwersum było zbiorem skończonym. Wtedy zdanie z kwantyfikatorem ogólnym da się zastąpić koniunkcją odpowiednich zdań atomowych, a zdanie z kwantyfikatorem egzystencjalnym – alternatywą zdań atomowych. Mówimy „w zasadzie", bo przy uniwersach skończonych lecz bardzo dużych takie przepisanie na koniunkcje czy alternatywy byłoby niewykonalne praktycznie. Nie zmienia to jednak istoty omawianego związku. Zilustrujmy go na przykładach bardzo małych uniwersów.

Niech naszym uniwersum będzie zbiór państw UE, a predykatem służącym do utworzenia zdania — wyrażenie „znajduje się w Europie", w skrócie „Z". Wtedy zdanie

[6] $\forall_x . Z(x)$

mówi dokładnie to samo, co koniunkcja zdań atomowych:

[3] Tak jest w będącej przedmiotem tych wykładów logice zwanej klasyczną. Istnieją logiki nieklasyczne, operujące większą liczbą wartości logicznych.

[7] $Z(anglia) \wedge Z(austria) \wedge Z(belgia) \wedge ...$ (kropki wskazują na dalsze wyliczanie w porządku alfabetytycznym).

Koniunkcja ta jest prawdziwa dzięki prawdziwości wszystkich jej członów, a więc prawdziwe jest też równoważne z nią zdanie ogólne [6]. Tak dzięki kwantyfikacji formuła „$Z(x)$” staje się zdaniem prawdziwym. Zdanie to można odczytywać w języku naturalnym polskim conajmnuej na dwa sposoby:

[6.1] każdy kraj UE znajduje się w Europie;
[6.2] wszystkie kraje UE znajdują się w Europie.

Pozostając przy tym samym uniwersum, posłużmy się w tworzeniu zdania predykatem „jest krajem anglojęzycznym”, w skrócie „A”. Wtedy zdanie

[8] $\exists_x.A(x)$

mówi dokładnie to samo, co alternatywa zdań atomowych:

[9] $A(anglia) \vee A(austria) \vee A(belgia) \wedge ... \vee A(irlandia) \vee ...$

Jest ona prawdziwa dzięki prawdziwości dwóch jej członów, a więc prawdziwe jest też równoważne z nią zdanie egzystencjalne [8]. Zdanie to można odczytywać w języku naturalnym na różne sposoby, na przykład:

[8.1] przynajmniej jeden kraj UE jest anglojęzyczny;
[8.2] istnieją w UE kraje anglojęzyczne;
[8.3] niektóre kraje UE są anglojęzyczne;
[8.4] pewne kraje UE są anglojęzyczne.

4. Zdania ogólne dotyczące podzbiorów uniwersum tworzone za pomocą implikacji. Zdania [6] i [8] dotyczą wszystkich elementów zbioru pokrywającego się z rozważanym uniwersum (przypomnijmy: zbiór krajów UE). Nie wszystkie jednak zdania, które wypowiadamy mają ten maksymalny stopień ogólności; częściej zdarza się wygłaszać twierdzenia o pewnych podzbiorach naszego zbioru uniwersalnego. Chce się np. powiedzieć, że (w naszym uniwersum!)

[10] Każdy kraj anglojęzyczny leży na wyspie.

Orzekanie, że leży na wyspie jest tu ograniczone do pewnego podzbioru uniwersum, mianowicie do krajów anglojęzycznych. Zauważmy, że w konstrukcji gramatycznej języka polskiego typu „każde A jest B” zawiera się domyślnie stwierdzenie pewnego warunku, stąd tę samą myśl można wyrazić w zdaniu warunkowym czyli implikacji:

[10.1] Jeśli kraj jest anglojęzyczny, to leży na wyspie.

Powiedzmy to jeszcze raz, w wersji mniej potoczystej, ale z pewnych względów bardziej pouczającej:

[10.2] Zawsze, jeśli coś jest krajem jest anglojęzycznym, to (to coś) leży na wyspie.

Wersja [10.2] podprowadza nas najbliżej, gdy idzie o strukturę gramatyczną, do zapisu symbolicznego w języku logiki. Trzeba tylko w zaimku „coś” dostrzec odpowiednik zmiennej indywiduowej, np. „y” a w przysłówku „zawsze” odpowiednik kwantyfikatora ogólnego. Spójnik „jeśli, to” oddamy jak zwykle symbolem implikacji, a predykat „leży na wyspie” skrócimy do „W”. I tak dochodzimy do następującego zdania w języku logiki predykatów:

[10.3] $\forall_y(A(y) \Rightarrow W(y))$.

Zdanie to niesie zarazem informację o stosunku *zawierania się* czyli *inkluzji*, mianowicie o tym, że zbiór krajów anglojęzycznych zawiera się w zbiorze krajów leżących na wyspie.

Za pomocą kwantyfikatora ogólnego i implikacji wyrażamy też stosunek *wykluczania się* między zbiorami. Powiadamy, na przykład (nadal mając na uwadze uniwersum UE).

[11] Żaden kraj anglojęzyczny nie leży na kontynencie.

Skracając drugi z predykatów do „K”, zapiszemy to symbolicznie, jak następuje.

[11.1] $\forall_y(A(y) \Rightarrow \neg K(y))$.

5. Zdania egzystencjalne tworzone za pomocą koniunkcji. Gdy chcemy powiedzieć, ze pewne indywidua mają ileś cech wspólnych, a więc należą do iluś naraz podzbiorów uniwersum, służy do tego celu konstrukcja wykorzystująca kwantyfikator egzystencjalny i koniunkcję. Niech dla zbogacenia przykładu jedna z tych cech będzie negatywna, to znaczy polegająca na braku cechy pozytywnej, mianowicie na nie-należeniu do strefy euro, co oddamy za pomocą negacji „$\neg E(z)$”. Zbiorem uniwersalnym nadal są kraje Unii. Oto przykład.

[12] Istnieje kraj na wyspie nie należący do strefy euro.

Symbolicznie:

[12.1] $\exists_z(W(z) \wedge \neg E(z))$.

Zdanie to niesie zarazem informację o stosunku *krzyżowania się* dwóch zbiorów, czyli o yum, że mają one niepustą część wspólną. Wchoidzący w grę kraj, w tym przypadku Anglia, należy do zbioru krajów położonych na wyspie i zarazem do zbioru krajów pozostających poza strefą euro.

Faktem o szczególnie doniosłym znaczeniu dla zastosowań logiki jest stosunek zachodzący między zdaniami o następujących strukturach:

[13] $\forall_x(P(x) \Rightarrow Q(x))$
oraz
[14] $\exists_x(P(x) \wedge \neg Q(x))$.

Jest to stosunek sprzeczności, co znaczy że zdania te nie mogą być oba naraz prawdziwe ani oba naraz fałszywe. Jeśli więc jedno z nich jest prawdą, to drugie fałszem, a jeśli jedno fałszem, to drugie prawdą. Zdania typu [14] bywają bliskie doświadczeniu, bo jeśli zaobserwuje się współzachodzenie dwóch cech (tutaj, jednej pozytywnej i jednej negatywnej), to ma się wystarczającą podstawę do twierdzenia, że istnieją przedmioty o tych cechach. Takie twierdzenie, jako sprzeczne ze zdaniem postaci [13], nadaje się do obalania zdań tej postaci, a jest to forma, którą często przybierają hipotezy w poddawanych testowaniu empirycznemu teoriach.